Ж.К.Сагындыков
М.К.Сагындыков

# АЛГЕБРА БОЮНЧА ЛЕКЦИЯЛАР

Ош-2010

УДК 512
ББК 22.14
С 13

Рецензент – физика–математика илимдеринин доктору,
профессор Ж.С. Сатаров
физика –математика илимдеринин кандидаты,
доцент А. Артыков

Сагындыков Ж.К., Сагындыков М.К.
С 13 Алгебра боюнча лекциялар. Окуу колдонмо. 2010. - 92 бет.

ISBN 978-9967-03-650-5

Окуу колдонмо математика жана информациялык технологиялар факультетинин алгебра жана геометрия кафедрасында окутулган лекциялардын негизинде түзүлүп, математикалык логиканын, көптүктөр теориясынын негизги түшүнүктөрү, группа, алкак, талаа, салыштыруулар, квадраттык формалар ... өлөрдүн алгебрасы жана

... уденттерине арналат.

... ешинин

УДК 512
ББК 22.14

22.14
С 14

Мазмуну

## КИРИШҮҮ

Математик-студенттердин математикалык билими негизги үч дисциплинаны: математикалык анализди, геометрияны жана алгебраны окуп үйрөнүүдөн башталат. Бул дисциплиналар бир топ жерде кесилишет, бирок бирин-бири толуктоо менен математикалык билимдин базасын түзүшөт.

Алгебра, эң эле жөнөкөй алгебралык теңдемелерди чечүүнү үйрөнгөндөн кийин, эки багытта өнүккөн: биринчиден, бир нече белгисиздери менен сызыктуу теңдемелер системасын чечүүнү үйрөнүүдөн; экинчиден, алгебраистер үчүнчү, төртүнчү жана жогорку тартиптеги алгебралык теңдемелерди чыгаруунун методдорун издешкен. Бул эки багыт классикалык алгебранын, сызыктуу алгебра жана көп мүчөлөрдүн алгебрасы деп, эки бөлүккө бөлүнүшүн аныктаган. Азыркы алгебра курсунун башталышында математикалык логиканын, көптүктөр теориясынын негизги түшүнүктөрү окутулат. Андан кийин группа, алкак, талаа, салыштыруулар, квадраттык формалар, сызыктуу алгебра жана башка алгебралык системалар үйрөтүлөт. Алгебрада жана анын колдонулуштарында группа жана алкактар теориясы негизги орунду ээлейт.

Алгебра курсунун негизги максаты болуп математиканы терең өздөштүрүүгө зарыл болгон негизги алгебралык системаларды үйрөтүү жана алгебралык маданиятты калыптандыруу болуп эсептелет.

Окуу колдонмого көп жылдардан бери алгебра курсу боюнча окулган лекциялардын материалдары киргизилди. Бул колдонмо кыргыз тилинде жазылган алгачкы китептерден болгондуктан, колдонмого карата сын-пикирлериңиздер болсо төмөнкү дарек боюнча жөнөтүүңүздөрдү суранабыз: sagyndykov@mail.ru.

**Окуу колдонмо жогорку окуу жайларынын “Математика”, “Математика жана информатика”, “Информатика”, “Колдонмо математика жана информатика” адистиктеринин студенттерине арналат.**

# 1-ГЛАВА. МАТЕМАТИКАЛЫК ЛОГИКАНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

## 1.1. Айтуулар

***Аныктама.*** *"Чын" же "жалган" деп гана айтууга мүмкүн болгон жай сүйлөм айтуу деп аталат.*

Мисалы, Бишкек - Кыргызстандын борбору – "чын", Бишкек - Өзбекстандын борбору – "жалган". Ал эми Ысыккөлдө 200000 балык бар деген сүйлөм айтуу болбойт.

Айтууларды латын алфавитинин кичине тамгалары менен белгилейбиз. Айтуулардын үстүнөн "тануу", "коньюнкция", "дизьюнкция", "импликация" жана "эквиваленция" амалдарын аткарууга болот.

**1) Айтуулардын тануусу.** *$p$ айтуусунун тануусу деп $p$ айтуусу чын болгондо "жалган", ал эми $p$ айтуусу жалган болгондо "чын" болгон жаңы айтууну айтабыз.*

Айтуулардын тануусу $\overline{p}$ деп белгиленип, "$p$ эмес" же "$p$ нын тануусу" деп окулат. $\overline{p}$ айтуусунун логикалык маанисин төмөнкү таблица менен аныктоого болот:

| $p$ | $\overline{p}$ |
|---|---|
| ч | ж |
| ж | ч |

*Айтуунун логикалык маанисин аныктоого мүмкүн болгон таблицаны чындык таблицасы деп айтабыз.*

**Мисал.** $p: "2<5"$ – *чын*, $\overline{p}: "2 \geq 5"$ – *жалган*.

**2) Айтуулардын коньюнкциясы (логикалык көбөйтүндүсү).** *$p$ жана $q$ айтууларынын ар бири чын болгондо "чын" болуп, алардын жок дегенде бирөөсү жалган болгондо "жалган" болгон жаңы айтууну $p$ жана $q$ айтууларынын коньюнкциясы деп айтабыз.*

$p$ жана $q$ айтууларынын коньюнкциясы $p \wedge q$ түрүндө белгиленип, "$p$ жана $q$" деп окулат. $p \wedge q$ коньюнкциясынын логикалык мааниси төмөнкү чындык таблицасы менен аныкталат:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| ч | ч | ч |
| ч | ж | ж |
| ж | ч | ж |
| ж | ж | ж |

**3) Айтуулардын дизьюнкциясы (логикалык кошуу).** *$p$ жана $q$ айтууларынын жок дегенде бирөөсү чын болгондо "чын" болуп, алардын ар бири жалган болгондо "жалган" болгон жаңы айтууну $p$ жана $q$ айтууларынын дизьюнкциясы деп айтабыз.*

$p$ жана $q$ айтууларынын дизьюнкциясы $p \vee q$ түрүндө белгиленет жана "$p$ же $q$" деп окулат. $p \vee q$ дизьюнкциясынын логикалык мааниси төмөнкү чындык таблицасы менен аныкталат:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| ч | ч | ч |
| ч | ж | ч |
| ж | ч | ч |
| ж | ж | ж |

**4) Айтуулардын импликациясы.** *$p$ айтуусу чын, $q$ айтуусу жалган болгондо "жалган" болгон, ал эми калган бардык учурларда "чын" болгон жаңы айтууну $p$ жана $q$ айтууларынын импликациясы деп айтабыз.*

$p$ жана $q$ айтууларынын импликациясы $p \Rightarrow q$ деп белгиленет жана "эгерде $p$ болсо, анда $q$ болот" деп окулат. $p \Rightarrow q$ импликациясынын логикалык мааниси төмөнкү чындык таблицасы менен аныкталат:

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| ч | ч | ч |
| ч | ж | ж |
| ж | ч | ч |
| ж | ж | ч |

Импликация төмөнкүчө да окулат: "$p$ дан $q$ келип чыгат" же "$p$ болушу үчүн $q$ болушу зарыл".

**5) Айтуулардын эквиваленциясы.** *$p$ жана $q$ айтууларынын экөөсү тең чын болгондо да "чын", экөөсү тең жалган болгондо да "чын" болуп, ал эми калган бардык учурларда "жалган" болгон жаңы айтууну $p$ жана $q$ айтууларынын эквиваленциясы деп айтабыз.*

$p$ жана $q$ айтууларынын эквиваленциясы $p \Leftrightarrow q$ деп белгиленет жана "эгерде $p$ болсо гана $q$ болот" деп окулат. $p \Leftrightarrow q$ эквиваленциясынын логикалык мааниси төмөнкү чындык таблицасы менен аныкталат:

| $p$ | $q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| ч | ч | ч |
| ч | ж | ж |
| ж | ч | ж |
| ж | ж | ч |

Эквиваленция төмөнкүчө да окулат: “ $p$ менен $q$ логикалык жактан тең күчтүү” же болбосо “ $p$ болушу үчүн $q$ болушу зарыл жана жетиштүү”.

**Мисал.** Төмөнкү формуланын чындыгын аныктагыла:

$$f=((r\vee q)\Rightarrow q)\wedge(p\wedge q)\Rightarrow q\ .$$

Формуланын чындыгы, $p$, $q$, $r$ логикалык өзгөрмөлөрүнүн маанилеринин мүмкүн болгон варианттары тандалып, төмөнкү таблицадан аныкталат.

| $p$ | $q$ | $r$ | $r\vee q$ | $(r\vee q)\Rightarrow r$ | $p\wedge q$ | $(r\vee q)\Rightarrow r\wedge p\wedge q$ | f |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ж | ж | ж | ж | ч | ж | ж | ч |
| ж | ж | ч | ч | ж | ж | ж | ч |
| ж | ч | ж | ч | ч | ж | ж | ч |
| ж | ч | ч | ч | ч | ж | ж | ч |
| ч | ж | ж | ж | ч | ж | ж | ч |
| ч | ж | ч | ч | ж | ж | ж | ч |
| ч | ч | ж | ч | ч | ч | ч | ч |
| ч | ч | ч | ч | ч | ч | ч | ч |

## 1.2. Айтуулардын үстүнөн жүргүзүлгөн амалдардын касиеттери

Айтуулардын үстүнөн жүргүзүлгөн жогорудагы амалдар төмөнкүдөй касиеттерге ээ:

$1^0$. $\bar{\bar{p}}\equiv p$ - кош тануу закону.

$2^0$. $p\wedge q\equiv q\wedge p$ - коньюнкция коммутативдик касиетке ээ.

$3^0$. $(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$ - коньюнкция ассоциативдик касиетке ээ.

$4^0$. $p\vee q\equiv q\vee p$ - дизьюнкция коммутативдик касиетке ээ.

$5^0$. $(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$ - дизьюнкция ассоциативдик касиетке ээ.

$6^0$. $(p\wedge q)\vee r\equiv(p\vee r)\wedge(q\vee r)$ - дизьюнкция коньюнкцияга карата дистрибутивдик касиетке ээ.

$7^0$. $(p\vee q)\wedge r\equiv(p\wedge r)\vee(q\wedge r)$ - коньюнкция дизьюнкцияга карата дистрибутивдик касиетке ээ.

$$\left.\begin{array}{l}8^0.\ \overline{p\wedge q}\equiv\bar p\vee\bar q\\ 9^0.\ \overline{p\vee q}\equiv\bar p\wedge\bar q\end{array}\right\}$$ – айтуулар үчүн де - Моргандын закондору.

$10^0$. $p\Rightarrow q\equiv\bar q\Rightarrow\bar p$ - котропозиция закону.

$$\left.\begin{array}{l}11^0.\ p\vee\bar p\equiv ч,\ p\wedge ч\equiv p,\ p\vee p\equiv 1\\ 12^0.\ p\wedge\bar p\equiv ж,\ p\wedge\bar p\equiv ж\end{array}\right\}$$ - үчүнчү учурдун болбостук закону.

$$\left.\begin{array}{l}13^0.\ p\vee p\equiv p\\ 14^0.\ p\wedge p\equiv p\end{array}\right\}$$ - иденпотенттик закондору.

$15^0$. $p\Rightarrow q\equiv\bar p\vee q$.

$16^0.\ p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \equiv (\bar{p} \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}).$

$17^0.\ p \wedge (p \vee q) \equiv p.$

$18^0.\ p \vee p \wedge q \equiv p.$

$19^0.\ \bar{p} \wedge (p \vee q) \equiv \bar{p} \wedge q.$

$20^0.\ p \vee \bar{p} \wedge q \equiv p \vee q.$

$21^0.\ \overline{(p \Rightarrow q)} \equiv p \wedge \bar{q}.$

$22^0.\ \bar{p} \wedge (p \vee q) \equiv \bar{p} \wedge q.$

$23^0.\ p \vee \bar{p} \wedge q \equiv p \vee q.$

Ар бир касиетти чындык таблицаларынын жардамында далилдөөгө болот.

**Мисал.** $2^0.\ p \wedge q \equiv q \wedge p$ касиетинин далилдөөсү төмөнкү таблицадан келип чыгат:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $q \wedge p$ | $\equiv$ |
|---|---|---|---|---|
| ч | ч | ч | ч | ч |
| ч | ж | ж | ж | ж |
| ж | ч | ж | ж | ж |
| ж | ж | ж | ж | ж |

$5^0.\ (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ касиетинин далилдөөсү - төмөнкү таблицадан келип чыгат:

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \vee q$ | $(p \vee q) \vee r$ | $q \vee r$ | $p \vee (q \vee r)$ | $\equiv$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ч | ч | ч | ч | ч | ч | ч | ч |
| ч | ж | ч | ж | ж | ж | ж | ч |
| ж | ч | ж | ж | ж | ж | ж | ч |
| ж | ж | ж | ж | ж | ж | ж | ч |
| ч | ч | ж | ч | ж | ж | ж | ч |
| ч | ж | ж | ж | ж | ж | ж | ч |
| ж | ч | ч | ж | ж | ч | ж | ч |
| ж | ж | ч | ж | ж | ж | ж | ч |

**Мисал.** Төмөнкү логикалык формуланы жөнөкөйлөткүлө:

$\overline{(p \vee q) \Rightarrow \overline{(q \vee r)}}.$

Чыгаруу. Айтуулардын үстүнөн жүргүзүлгөн амалдардын $21^0$, $1^0$, $4^0$, $2^0$, $13^0$ касиеттерин колдонуп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$\overline{(p \vee q) \Rightarrow \overline{(q \vee r)}} = (p \vee q) \wedge \overline{\overline{(q \vee r)}} = (p \vee q) \wedge (q \vee r) =$

$= (p \vee q) \wedge q \vee (p \vee q) \wedge r = (p \vee q) \wedge q \vee (p \vee q) \wedge r = p \wedge q \vee q \vee p \wedge r \vee q \wedge r =$

$= q \wedge (p \vee ч) \vee r \wedge (p \vee q) = q \vee p \wedge r \vee q \vee r =$

$= q \wedge (ч \vee r) \vee p \wedge r = q \vee p \wedge r.$

**Мисал.** Эгерде төмөнкү айтуулар белгилүү болсо, анда шахматта кайсы оюнчулар ойногон, кайсы оюнчулар ойногон эмес:

а) эгерде Асан же Бакыт ойногон болсо, анда Айдар ойногон эмес;

б) эгерде Бакыт ойногон эмес болсо, анда Айдар жана Марат ойногон;

в) Айдар ойногон.

Чыгаруу. Төмөнкү айтууларды аныктайлы:

$p$ - «Асан шахмат ойногон» ;

$q$ - «Бакыт шахмат ойногон» ;

$r$ - «Айдар шахмат ойногон» ;

$t$ - «Марат шахмат ойногон» .

Белгилүү фактыларды туюнткан айтууларды жазалы:

а) $(p \vee q) \Rightarrow \bar{r}$;

б) $\bar{q} \Rightarrow r \wedge t$;

в) $r$.

Бул айтуулардын көбөйтүндүсүн жазып, жөнөкөйлөтүп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$((p \vee q) \Rightarrow \bar{r}) \wedge (\bar{q} \Rightarrow r \wedge t) \wedge r = (\overline{(p \vee q)} \vee \bar{r}) \wedge (q \vee r \wedge t) \wedge r =$$

$$= ((\overline{p \wedge q}) \vee \bar{r}) \wedge (q \vee r \wedge t) \wedge r = \bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r \wedge t = ч.$$

Демек, $p = ж$, $q = ж$, $r = ч$, $t = ч$ болот.

Жообу: Шахматты Айдар жана Марат ойногон, ал эми Асан менен Бакыт ойногон эмес.

### 1.3. Квантордук операциялар

*I. "$\forall$" символу математикалык логикада жалпылык квантору деп аталат.*

$\forall x:$ - "каалаган $x$ үчүн" же "$x$ кандай гана болбосун".

Мисалы, $\forall x \in N$ - "каалаган натуралдык $x$ үчүн"; $A = \{a, b, c\}$, $\forall x \in A: p(x)$ - $A$ көптүгүнүн каалаган элементи $p$ касиетине ээ".

*II. "$\exists$" символу математикалык логикада жашоо квантору деп аталат.*

$\exists x:$ - "кандайдыр бир $x$ жашап", "төмөндөгү $x$ тер үчүн".

***Аныктама.*** *Эгерде формула өзгөрмөлөрдү конкреттүү маанилер менен алмаштырганда айтууга айланса, анда формула предикат деп аталат.*

## 2-ГЛАВА. КӨПТҮКТӨР ТЕОРИЯСЫ

### 2.1. Көптүктөр теориясынын элементтери

Көптүк – математикадагы алгачкы түшүнүктөрдүн бири болуп эсептелет. Ага төмөнкүдөй түшүндүрмө берүүгө болот:

*Кандайдыр бир обьектилердин жыйындысын көптүк деп атайбыз.*

Көптүктү түзгөн обьектилер - анын элементтери деп аталат. Көптүктөр кандайдыр бир алфавиттин жазма баш тамгалары менен, ал эми анын элементтери ошол эле алфавиттин жазма кичине тамгалары менен белгиленет.

Эгерде $a$ обьектиси $A$ көптүгүнүн элементи болсо, анда анын математикалык жазылышы $a \in A$ болот.

*Эч кандай элементи болбогон көптүк бош көптүк деп аталат жана $\varnothing$ түрүндө белгиленет.*

Кээ бир стандарттык негизги көптүктөр үчүн атайын белгилөөлөр кабыл алынган, мисалы, $N$ - натуралдык сандардын көптүгү, $Z$ - бүтүн сандардын көптүгү, $Q$ - рационалдык сандардын көптүгү, $R$ - чыныгы сандардын көптүгү, $C$ - комплекстик сандардын көптүгү, ж.б.у.с.

Эгерде көптүк чектүү болсо, анда ал көптүктүн элементтерин санап көрсөтүү менен жазууга болот, мисалы, $A = \{1,2,3,4,5\}$.

Кээ бир көптүктөр бардык элементтерине тиешелүү болгон мүнөздөөчү касиети боюнча да жазылат. Мисалы, $\hat{A} = \{2k / k \in Z\}$ - жуп бүтүн сандардын көптүгү.

Эгерде $p(x)$ кандайдыр бир $A$ көптүгүнүн бардык элементтерин мүнөздөөчү касиет болсо, анда $A$ көптүгү

$$A = \{x / p(x)\}$$

көрүнүшүндө жазылат.

***Аныктама.*** *Эгерде $A$ көптүгүнүн элементтери $B$ көптүгүнө тиешелүү болсо, анда $A$ көптүгү $B$ көптүгүнүн камтылуучу көптүгү деп аталат жана $A \subset B$ түрүндө жазылат.*

***Аныктама.*** *Эгерде $A$ жана $B$ көптүктөрү бирдей элементтерден турса жана $A$ көптүгүнүн каалаган элементи $B$ көптүгүнүн да элементи болсо, анда алар барабар көптүктөр деп аталат жана $A = B$ түрүндө жазылат.*

Төмөнкү теореманы далилдөөгө болот.

***Теорема*** *(Көлөмдүүлүк принциби). $A$ жана $B$ көптүктөрүнүн барабар болушу үчүн $A$ көптүгү $B$ көптүгүнө жана $B$ көптүгү $A$ көптүгүнө камтылышы зарыл жана жетиштүү.*

Ал математикада төмөндөгүчө жазылат:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A.$$

*Эгерде $A \subset B$, $A \neq \varnothing$, $A \neq B$ болсо, анда $A$ көптүгүн $B$ көптүгүнүн өздүк камтылуучусу деп аталат, мында $\varnothing$ - бош көптүк.*

Мисалы, эгерде $A$ - жуп сандардын көптүгү жана $B$ бардык бүтүн сандардын көптүгү болсо, анда $A$ көптүгү $B$ көптүгүнүн өздүк камтылуучусу болот.

Көптүктөрдүн үстүнөн төмөндөгүдөй амалдар аткарылат:

**1) Биригүү амалы.** $A$ жана $B$ көптүктөрүнүн элементтеринен турган элементтердин көптүгү $A$ жана $B$ көптүктөрүнүн биригүүсү деп аталат:

$$A \cup B \stackrel{def}{=} \{x / x \in A \vee x \in B\}.$$

**2) Кесилишүү амалы.** $A$ көптүгүнө да жана $B$ көптүгүнө да тиешелүү элементтерден турган элементтердин көптүгү $A$ жана $B$ көптүктөрүнүн кесилишүүсү деп аталат:

$$A \cap B \stackrel{def}{=} \{x / x \in A \wedge x \in B\}.$$

**3) Айырма амалы.** $A$ көптүгүнө гана тиешелүү жана $B$ көптүгүнө тиешелүү болбогон элементтердин көптүгү $\grave{A}$ көптүгүнөн $\hat{A}$ көптүгүнүн айырмасы деп аталат:

$$A \setminus B \stackrel{def}{=} \{x / x \in A \wedge x \notin B\}.$$

**4) $U$ универсалдык көптүгү.** Каралып жаткан теориядагы бардык көптүктөрдү камтыган көптүк универсалдык көптүк деп аталат, ал эми $\overrightarrow{A} \stackrel{def}{=} \{x / x \in U \wedge x \notin A\}$ көптүгү $A$ көптүгүнүн универсалдык көптүккө чейин толукталышы деп аталат.

**5) Көптүктөрдүн түз көбөйтүндүсү (Декарттык түз көбөйтүндү).**

***Аныктама.*** *Элементтеринин тартиби эске алынган көптүктү иреттелген көптүк деп атайбыз.*

$$\langle a,b \rangle, \langle a,b,c \rangle, \ldots$$

$$\{a,b\} = \{b,a\}, \langle a,b \rangle \neq \langle b,a \rangle.$$

Кээ бир иреттелген көптүктөрдүн атайын аттары бар: $\langle a,b \rangle$ - түгөй, $\langle a,b,c \rangle$ - үчтүк,…, $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ - n дик, ж.б.у.с.

***Аныктама.*** *Биринчи элементи А көптүгүнөн, экинчи элементи В көптүгүнөн алынган бардык түгөйлөрдүн көптүгү А жана В көптүктөрүнүн түз көбөйтүндүсү деп аталат жана төмөнкүдөй белгиленет:*

$$A \times B \stackrel{def}{=} \{\langle a,b \rangle / a \in A \wedge b \in B\}.$$

Мисалы, $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\} \Rightarrow A \times B = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle\}$.

***Аныктама.*** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *көптүктөрүнүн (декарттык) түз көбөйтүндүсү деп*

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \overset{def}{=} \{(a_1, a_2, ..., a_n) / a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}$$

*көптүгүн айтабыз.*

*Эгерде* $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$ *болсо, анда* $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ *көптүгү* $A$ *көптүгүнүн (декарттык) түз* $n-$*даражасы деп аталат жана төмөнкүдөй белгиленет:* $A^n$*, б.а.* $A \times A \times ... \times A = A^n$.

**Көптүктөрдүн үстүнөн жүргүзүлгөн жогорудагы амалдар төмөнкүдөй касиеттерге ээ:**

$1^0$. $A \cup B \equiv B \cup A$,

$2^0$. $A \cup (B \cup C) \equiv (A \cup B) \cup C$,

$3^0$. $A \cap B \equiv B \cap A$,

$4^0$. $A \cap (B \cap C) \equiv (A \cap B) \cap C$,

$5^0$. $(A \cap B) \cup C \equiv (A \cup C) \cap (B \cup C)$,

$6^0$. $(A \cup B) \cap C \equiv (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

$7^0$. $\overline{\overline{A}} = A$,

$$\left.\begin{array}{l} 8^0.\ \overline{A \cap B} \equiv \overline{A} \cup \overline{B} \\ 9^0.\ \overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cap \overline{B} \end{array}\right\} -$$ **көптүктөр үчүн де-Моргандын законлору,**

ж.б.у.с.

## 2.2. Толук математикалык индукция методу

**Сандар теориясында натуралдык сандардын теориясын аксиоматикалык метод менен түзүү үчүн Пеанонун (италиялык окумуштуу) аксиомалары деп аталган аксиомалар системасын пайдаланууга болот.**

***Пеанонун аксиомалары.*** *"*$\in$*" - алгачкы катыш жана "натуралдык сан" - алгачкы түшүнүк деп кабыл алынат.*

$1^0$. *1 деген натуралдык сан жашайт жана андай сан бирөө гана болот.*

$2^0$. *Каалаган натуралдык сан үчүн анын артынан келүүчү жалгыз гана натуралдык сан жашайт.*

$3^0$. *Каалаган натуралдык сан жок дегенде бир натуралдык сандын артынан келет.*

$4^0$. ***(Индукция аксиомасы). Эгерде 1 натуралдык саны кандайдыр бир М көптүгүнө таандык болсо, а санынын М көптүгүнө таандык болушунан анын артынан келүүчү натуралдык сандын М көптүгүнө таандык болушу келип чыгат, анда М - натуралдык сандардын камтылуучу көптүгү болот.***

**Жогорудагы индукция аксиомаларынын жардамында индукция принциби деп аталган төмөнкү теореманы далилдөөгө болот.**

***Теорема.*** *Эгерде индукция аксиомасы каалаган а натуралдык сан үчүн аткарылса, анда М көптүгү менен N көптүгү дал келет.*

Теореманын тууралыгы Пеанонун аксиомаларынан түздөн-түз текшерүүнүн натыйжасында келип чыгат.

Жогорудагы индукция принцибинин негизинде математикада кеңири белгилүү болгон толук математикалык индукция методу менен кандайдыр бир фактыны далилдөө төмөнкүдөй кадамдардан турат:

1) $n=1$ үчүн берилген фактынын тууралыгын текшеребиз.

2) $n=\kappa$ үчүн берилген фактыны туура деп болжолдоп алып (индуктивдүү божомол), анын негизинде берилген фактынын тууралыгын $n=\kappa+1$ үчүн далилдейбиз. Натыйжада, жогорудагы индукция принцибинин негизинде, берилген фактынын тууралыгы каалаган натуралдык сан үчүн далилденген болот.

**Мисал.** $\forall n \in N$ :

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+n\cdot n!=(n+1)!-1\,. \tag{1}$$

1) $n=1$ үчүн текшеребиз:

$$1\cdot 1!=2!-1 \Rightarrow 1=1.$$

2) $n=\kappa$ үчүн туура деп болжолдоп алабыз:

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+\kappa\cdot \kappa!=(\kappa+1)!-1\,.$$

Эми $n=\kappa+1$ үчүн далилдейбиз:

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+(\kappa+1)\cdot(\kappa+1)!=((\kappa+1)+1)!-1\,.$$

Анда

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+(\kappa+1)\cdot(\kappa+1)!=[1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+k\cdot k!\,]+(\kappa+1)\cdot(\kappa+1)!=$$
$$=((\kappa+1)+1)!-1+(\kappa+1)\cdot(\kappa+1)!=(k+1)!(k+1+1)-1=(k+2)!-1.$$

Демек, индукция принциби боюнча $\forall n \in N$ үчүн (1) туура болот.

### 2.3. Бинардык катыш

Айталы $A$ жана $B$ көптүктөрү берилсин. Алардын түз көбөйтүндүсүн жазалы:

$$A\times B \overset{def}{=} \{\langle a,b\rangle / a\in A \wedge b\in B\}.$$

*Аныктама. $A\times B$ түз көбөйтүндүсүнүн каалаган камтылуучу көптүгүн $A$ көптүгүнөн $B$ көптүгүнө карай аныкталган бинардык катыш (БК) деп атайбыз.*

$$\rho\,(БК)(A \text{ дан } B \text{ га}) \overset{def}{\Leftrightarrow} \rho \subset A\times B.$$

*Эгерде $\langle a,b\rangle$ түгөйү $\rho$ го камтылса, $a$ элементи $b$ элементине $\rho$ катышында болот деп аталат.*

$$\langle a,b\rangle \in \rho \Rightarrow a\rho b\,.$$

**Мисал.** $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$ көптүктөрүнүн түз көбөйтүндүсү:

$$A\times B=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}.$$

Түз көбөйтүндүдөн төмөнкүдөй катыштар алынат:

$\rho_1 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle\}$ - бинардык катыш,

$\rho_2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ - "=" болуу бинардык катышы.

$\rho_3 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle\}$ - "<" болуу бинардык катышы.

$\rho_4 = \{\langle 2,1\rangle\}$ - ">" болуу бинардык катышы.

$\rho_5 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ - "/" бинардык катышы ( / - бөлөт катышы).

$\rho_6 = \{\langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ - ":" бинардык катышы (: - бөлүнөт катышы).

## 2.4. Эквиваленттик катыш

***Аныктама.*** *A көптүгүндөгү $\rho$ бинардык катышы рефлексивдүүлүк, симметриялуулук жана транзитивдүүлүк касиеттерине ээ болсо, б. а.*

*1) рефлексивдүүлүк касиети:*

$$a\rho a$$

*2) симметриялуулук касиети:*

$$a\rho b \Rightarrow b\rho a$$

*3) транзитивдүүлүк касиети:*

$$a\rho b \wedge b\rho c \Rightarrow a\rho c,$$

*анда ал бул көптүктөгү эквиваленттик катыш (ЭК) деп аталат, мында $a,b,c \in A$.*

**Мисал.** 1) "=" катышы натуралдык сандардын көптүгүндө эквиваленттик катыш болобу?

$1^0$. $a=a$; $2^0$. $a=b \Rightarrow b=a$; $3^0$. $a=b \wedge b=c \Rightarrow a=c$,

демек, "=" катышы натуралдык сандардын көптүгүндө эквиваленттик катыш болот, мында $a,в,c \in N$.

2) тегиздиктеги түз сызыктардын көптүгүндөгү "//" катыш эквиваленттик катыш болобу?

$1^0$. $a // a$, $2^0$. $a // b \Rightarrow b // a$, $3^0$. $a // b \wedge b // c \Rightarrow a // c$,

демек, тегиздиктеги түз сызыктардын көптүгүндөгү "//" катыш эквиваленттик катыш болот.

$$\omega_a = \{x \in A / x\omega a\}$$

- $a$ элементи менен $\omega$ катышында боло тургандай $A$ көптүгүнүн элементтеринин көптүгү.

***Аныктама.*** *$\omega_a$ көптүгүн A көптүгүндөгү эквиваленттик класс деп атайбыз, жана бул эквиваленттик класс а элементи тарабынан жаратылды деп аталат.*

Эквиваленттик класстын касиеттери:

$1^0$. $\omega_a \cup \omega_в \cup \ldots \cup \omega_x = A$.

$2^0$. $\omega_a \cap \omega_в = \varnothing$, мында $\varnothing$ - бош көптүк.

***Аныктама.*** *Эквиваленттик класстарга бөлүнгөн көптүк фактор көптүк деп аталат.*

***Аныктама.*** *Эгерде $\rho$ бинардык катышы $A$ көптүгүндөгү рефлексивдүүлүк, симметриялуулук жана транзитивдүүлүк касиеттерине ээ болсо, анда $\rho$ - ирет катыш (ИК) деп аталат, б. а.*

$$\rho(ИК)A \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1)\ \rho(БК)A, \\ 2)\ \forall a,b,c \in A:\ a\rho a, \\ \quad a\rho b \wedge b\rho a \Rightarrow a=b, \\ \quad a\rho b \wedge b\rho c \Rightarrow a\rho c. \end{cases}$$

**Мисал.** ":" – бөлүнөт катышы чыныгы сандар көптүгүндө ирет катыш болобу?

$$1^0.\ a \vdots a;\ 2^0.\ a \vdots b \Rightarrow b \vdots a;\ 3^0.\ a \vdots b \wedge b \vdots c \Rightarrow a \vdots c,$$

демек, ":" катышы чыныгы сандар көптүгүндө ирет катыш болот.

### 2.5. Функционалдык катыш

Айталы $A$ жана $B$ көптүктөрү берилсин.

***Аныктама.*** *Эгерде $\rho$ бинардык катышы оң жактан бир маанилүү болсо, анда ал $A$ көптүгүнөн $B$ көптүгүнө карай чагылтуу же функционалдык катыш (ФК) деп аталат.*

$$a,c \in A;\ b,d \in B;\ \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in \rho:\ a=c \Rightarrow b=d.$$

***Аныктама.*** *Эгерде $A$ көптүгүнөн алынган каалаган $a$ элементи үчүн $B$ көптүгүнөн $b$ элементи табылып, алар $\rho$ катышында болсо, анда $\rho$ катышы $A$ көптүгүнөн $B$ көптүгүнө функция деп аталат.*

$$\forall a \in A,\ b \in B: \langle a,b\rangle \in \rho \Rightarrow \rho: A \to B,$$

$$\rho: A \to B \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1.\ \rho \subset A \times B, \\ 2.\ \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in \rho \Rightarrow\ a=c \Rightarrow b=d, \\ 3.\ \forall a \in A, b \in B: \langle a,b\rangle \in \rho. \end{cases}$$

Функционалдык катышты мындан ары $f$ менен белгилейбиз:

$$f: A \to B.$$

Чагылтуунун төмөнкүдөй түрлөрү бар:

**I. Иньекция же иньективдүү чагылтуу.**

***Аныктама.*** *Эгерде функционалдык катыш сол жактан да бир маанилүү болсо, анда ал чагылтуу иньекция деп аталат.*

$$f: A \xrightarrow{in} B \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1)\ f - \text{функционалдык катыш}, \\ 2)\ \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in \rho \Rightarrow\ a \neq c \Rightarrow b \neq d. \end{cases}$$

**II. Сьюрективдүү чагылтуу.**

*Аныктама.* $f$ *чагылтуусу* $A$ *көптүгүн* $B$ *көптүгүнө чагылтуу болсун. Эгерде, бул чагылтууда* $B$ *көптүгүнүн бош элементи калбаса, анда* $f$ *сьюрективдүү чагылтуу (үстүнө чагылтуу) деп аталат:*

$$f : A \xrightarrow{sur} B \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1)\ f : A \to B, \\ 2)\ \forall a \in A,\ \exists b \in B : \langle a,b \rangle \in f. \end{cases}$$

**III. Биективдүү чагылтуу.**

*Аныктама. Иньективдүү жана сьюрективдүү чагылтууну биективдүү чагылтуу деп атайбыз:*

$$f : A \xrightarrow{bi} B \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1)\ f : A \xrightarrow{in} B, \\ 2)\ f : A \xrightarrow{sur} B. \end{cases}$$

### 2.6. Негизги математикалык структуралар

Айталы $A$ көптүгү берилсин.

*Аныктама. Эгерде* $*$ *чагылтуусу* $A$ *көптүгүнүн декарттык квадратын* $A$ *көптүгүнүн өзүнө чагылтса, анда* $*$ *чагылтуусу* $A$ *көптүгүндө аныкталган бинардык алгебралык амал (БАА) деп аталат:*

$$*(БАА)A \overset{def}{\Leftrightarrow} * : A^2 \to A.$$

*Бул учурда* $A$ *көптүгү* $*$ *амалына карата алгебраны түзөт деп айтабыз жана ал* $\langle A, * \rangle = Q$ *деп белгиленет.*

**Мисал.** 1). "+" амалы натуралдык сандардын көптүгүндө алгебра болобу?

Каалаган натуралдык сандардын суммасы натуралдык сан болот, мындан $\langle N, + \rangle = Q$ болору келип чыгат.

2). "-" амалы натуралдык сандардын көптүгүндө алгебра болобу?

Каалаган натуралдык сандардын айырмасы натуралдык сан болбойт, себеби, $2-7=-5,\ -5 \notin N$, мындан $\langle N, - \rangle \neq Q$ болору келип чыгат.

#### 2.6.1. Группанын аныктамасы жана касиеттери

*Аныктама. Айталы,* $G$ *көптүгү* $*$ *амалына карата алгебра болсун б.а.* $\langle G, * \rangle = Q$*. Эгерде бул алгебрада төмөнкү шарттар аткарылса:*

$G-1^0 : \forall a,b,c \in G : a*(b*c)=(a*b)*c$, *б.а.* $*$ *га карата ассоциативдик касиетке ээ,*

$G-2^0 : \exists n_0 \in G : \forall a \in G : a*n_0 = n_0 * a$, *б.а. алгебрада нейтралдык элемент жашасын,*

$G-3^0$: *Алгебранын ар бир элементи үчүн симметриялык элемент жашасын*

$$\forall a \in G : \exists a' \in G \quad a*a' = a'*a = n_0$$

*(мында $a'$ - симметриялык элемент), анда берилген алгебраны группа деп айтабыз, б.а. $\langle G, *\rangle$ - группа. Кээде G көптүгү $*$ амалына карата группаны түзөт деп да айтышат.*

Жогорудагы шарттар ($G-1^0, G-2^0, G-3^0$) группанын аксиомалары деп аталат.

**Мисал. 1.** $G = N$, $* = "+"$ болсун, $\langle N, +\rangle$ - группа болорун көрсөтөлү:

$1^0$. $a+(b+c)=(a+b)+c$,

$2^0$. $a+n_0 = n_0 + a = a$ боло тургандай $n_0$ нейтралдык элементи жашабайт,

$3^0$. $a+a' = a'+a = n_0$ боло тургандай $a'$ симметриялык элементи жашабайт.

Демек, $\langle N, +\rangle$ - группа болбойт.

2. $G = Z$, $* = "+"$ болсун, $\langle Z, +\rangle$ - группа болорун көрсөтөлү:

$1^0$. $a+(b+c)=(a+b)+c$,

$2^0$. $a+n_0 = n_0 + a = a$ , $n_0 = 0$, б.а. нейтралдык элемент жашайт,

$3^0$. $a+a' = a'+a = n_0$ , $a' = -a$, б.а. симметриялык элемент жашайт.

Демек, $\langle Z, +\rangle$ - группа болот.

Эгерде, $* - "+"$ амалы болсо, анда группа аддитивдүү группа деп аталат.

Эгерде, $* - "\times"$ амалы болсо, анда группа мультипликативдик группа деп аталат.

$G-4^0$ : Эгерде $\langle G, *\rangle$ группасында $*$ амалы коммутативдик касиетке ээ болсо, анда группаны абелдик группа деп атайбыз.

Группада төмөндөгүдөй касиеттер орун алат:

$1^0$. *Группада нейтралдык элемент жалгыз гана болот.*

Далилдөө. Каршысынан далилдейбиз. Айталы, $n_0, n_0'$ - нейтралдык элементтер болсун.

$$\left.\begin{array}{l} n_0 * n_0' \overset{n_0-\text{н.э}}{=} n_0' \\ n_0 * n_0' \overset{n_0'-\text{н.э}}{=} n_0 \end{array}\right\} \Rightarrow n_0' = n_0,$$

демек, нейтралдык элемент жалгыз.

$2^0$. *Группада ар бир элементтин жалгыз гана симметриялык элементи болот.*

Далилдөө. $a', a''$ - эки симметриялык элемент болсун. Биринчи касиеттин негизинде $a' = a''$ болору келип чыгат, б.а. симметриялык элемент жалгыз болот.

$3^0$. *Группада $a * x = b$ көрүнүшүндөгү теңдеме жалгыз гана чечимге ээ:*

$$\forall a, b \in G, \ \exists! x \in G : a * x = b.$$

Далилдөө. $G - 3^0$ боюнча $\exists a' \in G$:

$$a' * (a * x) = a' * b \ \Rightarrow x = a' * b,$$

мындай $x$ жалгыз гана болот.

***Аныктама.*** *$G$ группасы берилсин. $H$ көптүгү $G$ көптүгүнүн камтылуучу көптүгү болсун. Эгерде $\langle H, * \rangle$ группаны түзсө, анда $H$ көптүгү $G$ көптүгүнүн камтылуучу группасы деп аталат.*

$$H \underset{группа}{\subset} G \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1) \ H \subset G, \\ 2) \ \langle H, * \rangle - группа. \end{cases}$$

***Теорема.*** *$H$ көптүгү $G$ группасынын камтылуучу көптүгү болсо, анда $H$ көптүгүнүн $G$ көптүгүнө камтылуучу болушу үчүн $H$ көптүгүнүн $*$ жана $a'$ карата алгебра болушу зарыл жана жетиштүү.*

Далилдөө. а) зарылдык камтылуучу группанын аныктоосунан келип чыгат. б) жетиштүүлүк

$$\langle H, *, a' \rangle = Q \Rightarrow H \underset{гр}{\subset} G,$$

камтылуучу болушун көрсөтүү керек. Шарт боюнча $H \subset Gгр$. Камтылуучу группанын аныктоосундагы 1-шарт теореманын негизги шарты катары берилген.

$\langle H, * \rangle$ - группа болорун көрсөтүү керек.

Группанын аныктоосундагы шарттарды текшеребиз:

$\langle H, * \rangle = Q$,

$G - 1^0 : \forall a, b, c \in H \underset{H \subset G}{\Rightarrow} a, b, c \in G \underset{гр}{\Rightarrow} a * (b * c) = (a * b) * c$,

$G - 2^0 : \exists n_0 \in H : \forall a \in H : \ a * n_0 = n_0 * a$,

$G - 3^0 : \ \forall a \in H : \exists a' \in H, \ a * a' = a' * a = n_0$,

демек, $\langle H, * \rangle$ – группа болушунан $H \underset{гр.}{\subset} G$ болору келип чыгат.

### 2.6.2. Группалардын морфизмдери

$G$ жана $G'$ группалары берилсин.

***Аныктама.*** *Эгерде $G$ көптүгүн $G'$ көптүгүнө чагылтуу жашап, төмөнкү шарт аткарылса (б.а. ал чагылтуу группанын негизги амалдарын сактаса):*

$$G \overset{гом}{\cong} G' \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \ \exists f : G \to G', \\ 2) \ \forall a, b \in G : \ f(a * b) = f(a) \circ f(b), \end{cases}$$

*анда $G$ жана $G'$ группалары гомоморфтуу группалар деп аталат. Бул учурда $f$ гомоморфизм деп аталат.*

***Аныктама.*** *Эгерде $G$ көптүгүн $G'$ көптүгүнө иньективдүү чагылтуу жашап, төмөнкү шарт аткарылса (б.а. ал чагылтуу группанын* *негизги амалдарын сактаса):*

$$G \overset{мон}{\cong} G' \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \exists f : G \overset{in}{\to} G', \\ 2)\ \forall a, b \in G:\ f(a * b) = f(a) \circ f(b), \end{cases}$$

*анда G жана G′ группалары мономорфтуу группалар деп аталат. Бул учурда f ти мономорфизм деп атайбыз.*

***Аныктама.** Эгерде G көптүгүн G′ көптүгүнө сюрективдүү чагылтуу жашап, төмөнкү шарт аткарылса (б.а. ал чагылтуу группанын негизги амалдарын сактаса):*

$$G \overset{эпи}{\cong} G' \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \exists f : G \overset{sur}{\to} G', \\ 2)\ \forall a, b \in G:\ f(a * b) = f(a) \circ f(b), \end{cases}$$

*анда G жана G′ группалары эпиморфтуу группалар деп аталат. Бул учурда f эпиморфизм деп аталат.*

***Аныктама.** Эгерде G көптүгүн G′ көптүгүнө биективдүү чагылтуу жашап, төмөнкү шарт аткарылса (б.а. ал чагылтуу группанын негизги амалдарын сактаса):*

$$G \cong G' \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \exists f : G \overset{bi}{\to} G', \\ 2)\ \forall a, b \in G:\ f(a * b) = f(a) \circ f(b), \end{cases}$$

*анда G жана G′ группалары изоморфтуу группалар деп аталат. Бул учурда f изоморфизм деп аталат.*

***Аныктама.** Эгерде G көптүгүн G′ көптүгүнө чагылтуу жашап, төмөнкү шарт аткарылса (б.а. ал чагылтуу группанын негизги амалдарын сактабаса):*

$$G \overset{aut}{\cong} G' \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \exists f : G \to G', \\ 2)\ \forall a, b \in G:\ f(a * b) = f(a) * f(b), \end{cases}$$

*анда G жана G′ группалары аутоморфтуу группалар деп аталат. Бул учурда f аутоморфизм деп атайбыз.*

***Аныктама.** Эгерде G көптүгүн G′ көптүгүнө чагылтуу жашап, төмөнкү шарт аткарылса (б.а. ал чагылтуу группанын негизги амалдарын сактаса):*

$$G \overset{энд}{\cong} G' \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \exists f : G \to G', \\ 2)\ \forall a, b \in G:\ f(a * b) = f(a * b), \end{cases}$$

*анда G жана G′ группалары эндоморфтуу группалар деп аталат. Бул учурда f эндоморфизм деп аталат.*

### 2.6.3. Гомоморфизмдин ядросу

$\langle G,*\rangle$, $\langle G',\circ\rangle$ - группалар жана $G \overset{гом}{\cong} G'$ болсун.

***Аныктама.*** *$G'$ группасынын нейтралдык элементине чагыла турган $G$ группасынын элементтеринин көптүгү бул учурдагы гомоморфизмдин ядросу деп аталат жана ал төмөнкүдөй белгиленет.*

$$Ker\, f \overset{def}{=} \{x \in G \,/\, f(x) = n_0,\, n_0 \in G'\}.$$

**Мисал.** $G = \{2k \,/\, k \in Z\}$ - мультипликативдик группа, $G' = Z$ - аддитивдик группа болсун. Гомоморфизмдин ядросун тапкыла.

1. Гомоморфизм экенин текшеребиз.

$$G \overset{гом}{\cong} G' \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\, \exists f : G \to G', \\ 2)\, \forall 2^{k_1}, 2^{k_2} \in G : f(2^{k_1} \cdot 2^{k_2}) = f(2^{k_1}) + f(2^{k_2}),\; f(2^{k_1} \cdot 2^{k_2}) = k_1 + k_2 \end{cases}$$

Мындан $f$ - гомоморфизм болору келип чыгат.

2. Гомоморфизмдин ядрсун табабыз.

$$f(2^k) = 0 \Rightarrow Ker\, f = \{2^0\} = \{1\}.$$

***Теорема.*** *$f : G \overset{гом}{\to} G'$ болсун. $f$ гомоморфизмдин ядросу $G$ группасынын камтылуучу группасы болот:*

$$f : G \overset{гом}{\to} G' \Rightarrow Ker\, f \underset{гр}{\subseteq} G.$$

Далилдөө. 2.6.1-пунктундагы теореманы колдонобуз.

$\forall x_1, x_2 \in Ker\, f$, $\langle G, * \rangle = Q$ жана $\langle G', \circ \rangle = Q$,

$$f(x_1 * x_2) = f(x_1) \circ f(x_2) = x_1 * x_2,\quad x_1 * x_2 = n_0,$$

мында $n_0 \in G'$ - нейтралдык элемент, анда $x_1 * x_2 \in Ker\, f$ болоору келип чыгат.

## 2.7. Алкактын аныктамасы жана мисалдары

Айталы $K$ көптүгү берилсин жана $K \neq \varnothing$ болсун. $K$ көптүгү "+", "×" амалдарына карата алгебра болсун.

***Аныктама.*** *Эгерде төмөнкү шарттар аткарылса:*

*$K = 1^0$. $\langle K, + \rangle$ - аддитивдик абелдик группа,*

*$K = 2^0$. $\forall a, b, c \in K : (a + b) \cdot c = ac + bc,$*

$$a \cdot (b + c) = ab + ac,$$

*анда $\langle K, +, \cdot \rangle$ - алкак деп аталат.*

Мисалы, $Z$ - алкак болобу?

$K = 1^0$. $\langle Z, + \rangle$ - аддитивдик абелдик группа болот.

$K = 2^0$. $\forall a, b, c \in Z : (a + b) \cdot c = ac + bc,$

$$a \cdot (b + c) = ab + ac,$$

демек, $\langle Z, +, \cdot \rangle$ - алкак болот.

***Аныктама.*** *Эгерде алкакта "×" коммутативдик касиетке ээ болсо, анда $\langle K,+,\cdot\rangle$ - коммутативдик алкак деп аталат, б.а.*

$$\forall a,b\in K: a\cdot b=b\cdot a\Rightarrow\langle K,+,\cdot\rangle,$$

*коммутативдик алкак.*

***Аныктама.*** *Эгерде алкакта "×" ассоциативдик касиетке ээ болсо, анда $\langle K,+,\cdot\rangle$ - ассоциативдик алкак деп аталат:*

$$\forall a,b,c\in K: a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c\Rightarrow\langle K,+,\cdot\rangle,$$

*ассоциативдик алкак.*

***Аныктама.*** *Эгерде $\langle K,+,\cdot\rangle$ алкагында "×" амалына карата нейтралдык элемент жашаса, анда $\langle K,+,\cdot\rangle$ - бирдик элементи бар алкак деп аталат.*

Айталы $\langle K,+,\cdot\rangle$ жана $\langle K',+,\cdot\rangle$ алкактары берилсин.

***Аныктама.*** *Эгерде $f: K\to K'$ чагылтуусу жашап жана төмөнкү шарттар аткарылса (б.а. чагылтуу алкактын негизги амалдарын сактаса), анда чагылтуу гомоморфизм деп аталат, б.а.*

$$K\overset{гам}{\cong}K'\Leftrightarrow\begin{cases}1)\ \exists f: K\to K',\\ 2)\ \forall a,b\in K:\ f(a+b)=f(a)+f(b),\\ \qquad\qquad\quad f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b).\end{cases}$$

**2.7.1. Бүтүн сандардын алкагы**

$Z$ алкагын карайлы.

$$a,b\in Z:\ a=b\cdot q. \qquad (1)$$

***Аныктама.*** *Эгерде (1) шартты канааттандыруучу $q$ бүтүн саны жашаса, анда $a$ элементи $b$ элементине бөлүнөт деп аталат:*

$$a\,\vdots\,b\overset{def}{\Leftrightarrow}\exists q\in Z: a=b\cdot q.$$

***Теорема.*** *Бөлүнөт катышы транзитивдик касиетке ээ:*

$$a\,\vdots\,b\wedge b\,\vdots\,c\Rightarrow a\,\vdots\,c.$$

Далилдөө.

$$a\,\vdots\,b\wedge b\,\vdots\,c\overset{def}{\Rightarrow}\exists q_1,q_2\in Z: a=b\cdot q_1, b=c\cdot q_2\Rightarrow a=c\cdot(q_1\cdot q_2)\overset{def}{\Rightarrow}a\,\vdots\,c.$$

***Теорема*** *(Калдыктуу бөлүү жөнүндөгү теорема). Эгерде $a$ элементи $b$ элементине калдыктуу бөлүнсө, анда төмөндөгү шартты канааттандыруучу $r$, $q$ бүтүн сандары бир маанилүү табылат:*

$$\forall a,b\in Z: b\neq 0\Rightarrow\exists! q,r\in Z: a=b\cdot q+r,\ 0\le r<|b|.$$

Далилдөө. Эгерде $a=0$ болсо, анда $q=0, r=0$ болот, бул учурда шартты канааттандыруучу $r,q$ бүтүн сандары бир маанилүү табылат.

Эгерде $b>0$ болсо, анда $b$ га эселүү болгон сандарды карайлы, ал эселүүлөрдүн $a$ дан ашпаган эн чоңу $bq$ болсун:

$$bq \le a < b(q+1),$$

акыркы барабарсыздыктын ар бир мүчөсүнөн $bq$ ну кемитсек:

$$0 \le a-bq < b,\ a-bq=r,$$

мында $0 \le r < b$. Анда $a=bq+r$ болот.

Айталы, $p$ бүтүн саны берилсин.

***Аныктама.*** *Эгерде $p$ бүтүн санынын $\{\pm p, \pm 1\}$ сандарынан башка бөлүүчүлөрү жашабаса, анда $p$ саны жөнөкөй бүтүн сан деп аталат.*

Евклид жөнөкөй сандардын чексиздигин далилдеген.

**Теорема** *(Евклиддин теоремасы). Жөнөкөй бүтүн сандардын көптүгү чексиз көптүк болот.*

Далилдөө. Оң жөнөкөй бүтүн сандар үчүн теореманы каршысынан далилдейли: Айталы жөнөкөй бүтүн сандардын көптүгү чектүү болсун б.а $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_к$ гана бүтүн сандары болсун. $p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_к + 1$ - санын алсак, бул сан биз кабыл алган $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_к$ сандарынын бирөөнө да бөлүнбөйт. Демек, $p$ жөнөкөй саны бар. Ушул сыяктуу сандар табылат, анда жөнөкөй бүтүн сандардын көптүгү чексиз көптүк болот.

**Теорема** *(Арифметиканын негизги теоремасы). Каалаган $|a|>1$ бүтүн саны жөнөкөй бүтүн сан болот, же жөнөкөй бүтүн сандын көбөйтүндүсүнө ажырайт жана мындай ажыралма көбөйтүүчүлөрдүн жазылуу иретине чейинки тактыкта айтканда бирөө гана болот.*

Демек, жогорку теореманын негизинде каалаган бүтүн санды

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_к^{\alpha_к}$$

көрүнүшүндө жазууга болот. Бул бүтүн сандын каноникалык ажыралмасы.

Далилдөө. I. $a>0$, $p-$жөнөкөй бүтүн сан болсун, $a=p_1 q$.

1) $q$ - жөнөкөй сан болсо түздөн-түз далилденет.

2) $q=q_1 p_2$ болсо, анда $a=q_1 p_1 p_2$,

ж.б.у.с. бул процессти улантсак, $a$ төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$a = q_k p_1 p_2 p_3 \cdot \ldots \cdot p_k,$$

мында $q_k = 1$. Демек, жогоркулардан $a$ жөнөкөй сан болору келип чыгат.

II. Жалгыздыгы. Каалаган жөнөкөй сандын каноникалык ажыралмасы түрдүү болсун:

$$a = p_1 p_2 p_3 \cdot \ldots \cdot p_k, \qquad a = q_1 q_2 q_3 \cdot \ldots \cdot q_s.$$

Бул каноникалык ажыралмадан $p_1 p_2 p_3 \cdot \ldots \cdot p_к = q_1 q_2 q_3 \cdot \ldots \cdot q_s$ болору келип чыгат. Демек, ажыралма жалгыз гана болот.

Айталы $a, b \in Z$ берилсин. Арифметиканын негизги теоремасынын негизинде бул сандардын каноникалык ажыралмасын жазалы:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_\kappa^{\alpha_\kappa},\ b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \ldots p_s^{\beta_s}.$$

***Аныктама.*** *Каноникалык ажыралмасы менен берилген* $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_\kappa^{\alpha_\kappa}$, $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \ldots p_s^{\beta_s}$ *эки сандын эң чоң жалпы бөлүүчүсү төмөнкүгө барабар:*

$$(a, b) = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} p_3^{\gamma_3} \ldots p_m^{\gamma_m},$$

*мында* $\forall i : \gamma_i = min\{\alpha_i, \beta_i\}$.

***Аныктама.*** *Каноникалык ажыралмасы менен берилген* $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_\kappa^{\alpha_\kappa}$, $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \ldots p_s^{\beta_s}$ *эки сандын эң кичине жалпы эселүүсү төмөнкүгө барабар:*

$$[a, b] = p_1^{\theta_1} p_2^{\theta_2} p_3^{\theta_3} \ldots p_n^{\theta_n},$$

*мында* $\forall i : \theta_i = max\{\alpha_i, \beta_i\}$.

Эң чоң жалпы бөлүүчү жана эң кичине жалпы эселүү төмөнкү касиеттерге ээ.

$1^0$. Эки сандын эң чоң жалпы бөлүүчүсүнө алардын ар бири бөлүнөт: $\forall d = (a,b) \Rightarrow a \vdots d,\ b \vdots d$.

$2^0$. Эки сандын эң кичине жалпы эселүүсү алардын ар бирине бөлүнөт: $\forall M = [a,b],\ M \vdots a,\ M \vdots b$.

$3^0$. Эки сандын эң кичине жалпы эселүүсү алардын көбөйтүндүсүнүн эң чоң жалпы эселүүсүнө болгон катышына барабар:

$$[a,b] = \frac{ab}{(a,b)}.$$

***Теорема.*** *Сандын эң чоң жалпы бөлүүчүсү алар үчүн түзүлгөн Евклиддин алгоритминдеги эң акыркы нөл эмес калдыкка барабар болот.*

Далилдөө. $a, b \in Z$ сандарына калдыктуу бөлүү жөнүндөгү тоерема-ны колдонобуз:

$$a = bq + r, 0 \le r < |b|,$$
$$b = rq_1 + r_1, 0 \le r_1 < |r|,$$
$$r_1 = r_1 q_2 + r_2, 0 \le r_2 < |r_1|,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{k-1} = r_{k-1} q_k + r_k,$$
$$r_k = (r_{k-1}, r_k) = (r_{k-2}, r_{k-1}) = \ldots = (r, r_1) = (b, r) = (a, b).$$

Демек, $r_k = (a,b)$.

### 2.7.2. Сандык функциялар

***Аныктама.*** *Сандар теориясында аргументи жана мааниси натуралдык болгон функцияларды сандык функциялар деп атайбыз.*

**1. Натуралдык сандын бөлүүчүлөрүнүн саны.** Бул функция $\tau(n)$ менен белгиленет жана төмөнкүдөй аныкталат:

$$\tau(n)=\sum_{d/n}1.$$

***Теорема.*** *Эгерде* $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ *болсо, анда*

$$\tau(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1).$$

Далилдөө. $n$ дин каалагандай бөлүүчүсүн карайлы. $\forall d>1: d/n$. $d$ нын каноникалык ажыралмасын жазалы: $d=p_1^{i_1}p_2^{i_2}\dots p_n^{i_n}$ жана

$$d/n\Rightarrow\left.\begin{array}{c}0\le i_1\le\alpha_1\\0\le i_2\le\alpha_2\\------\\0\le i_k\le\alpha_k\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}\alpha_1+1\\\alpha_2+1\\---\\\alpha_k+1\end{array}\right\}$$

Демек, $\langle i_1,i_2,\dots,i_n\rangle$ векторлорунун саны $d$ санына барабар.

**2. Натуралдык сандын бөлүүчүлөрүнүн суммасы.** Бул функция $\sigma(n)$ менен белгиленет жана төмөнкүдөй аныкталат:

$$\sigma(n)=\sum_{d/n}d.$$

***Теорема.*** Эгерде $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ болсо, анда

$$\sigma(n)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\dots\cdot\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}.$$

## 2.8. Талаанын аныктамасы жана мисалдары

Айталы $P\neq\varnothing$ болсун.

***Аныктама.*** Эгерде $P$ көптүгү үчүн төмөнкү шарттар аткарылса:

$P-1^0$. $\langle P,+,\cdot\rangle$ - коммутативдик, ассоциативдик алкак болсо,

$P-2^0$. $P$ көптүгүндө $ax=b$ $(a\neq 0)$ теңдемесинин чечими жашасын, б.а.

$$\forall a,b\in P\wedge a\neq 0\Rightarrow\exists x\in P: ax=b,$$

анда $\langle P,+,\cdot\rangle$ - талаа деп аталат.

Жогорудагы аныктаманы төмөндөгүчө да берүүгө болот:

***Аныктама.*** *Эгерде,* $\langle P,+,\cdot\rangle=Q$ *болсо жана бул алгебрада төмөнкү шарттар аткарылса:*

$P-1^0$. $\forall a,b\in P: a+b=b+a,$

$P-2^0$. $\forall a,b,c\in P: a+(b+c)=(a+b)+c,$

$P-3^0$. $\exists 0\in P,\forall a\in P: a+0=a,$

$P-4^0$. $\forall a\in P,\exists -a\in P: a+(-a)=0,$

$P-5^0$. $\forall a,b\in P: a\cdot b=b\cdot a,$

$P-6^0.\ \forall a,b,c \in P: a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c,$

$P-7^0.\ \forall a,b,c \in P: (a+b)\cdot c = ac+bc,$

$P-8^0.\ \exists 1 \in P, \forall a \in P: a\cdot 1 = a,$

$P-9^0.\ \forall a \in P, a \neq 0, \exists a^{-1} \in P: a\cdot a^{-1} = 1,$

*анда $\langle P,+,\cdot\rangle$ - талаа деп аталат.*

Жогорку тогуз шарт талаанын аксиомалары деп аталат.

**1-мисал.** $P=Q$ болсун, $\langle Q,+,\cdot\rangle$ - талаа болушун көрсөтөлү. Анда төмөнкү шарттарды текшеребиз:

$P-1^0.\ \forall a,b \in Q: a+b=b+a,$

$P-2^0.\ \forall a,b,c \in Q: a+(b+c)=(a+b)+c,$

$P-3^0.\ \exists 0 \in Q, \forall a \in Q: a+0=a,$

$P-4^0.\ \forall a \in Q, \exists -a \in Q: a+(-a)=0,$

$P-5^0.\ \forall a,b \in Q: a\cdot b = b\cdot a,$

$P-6^0.\ \forall a,b,c \in Q: a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c,$

$P-7^0.\ \forall a,b,c \in Q: (a+b)\cdot c = ac+bc,$

$P-8^0.\ \exists 1 \in Q, \forall a \in Q: a\cdot 1 = a,$

$P-9^0.\ \forall a \in Q, a \neq 0, \exists a^{-1} \in Q: a\cdot a^{-1} = 1,$

демек, талаанын аксиомалары баары аткарылат, анда $\langle Q,+,\cdot\rangle$ - талаа болот. Ушул сыяктуу эле, $\langle R,+,\cdot\rangle$ - талаа болушун көрсөтүүгө болот.

**2-мисал.** $P=R^2=\{\langle a,b\rangle / a,b \in R\}$ болсун, $\langle R^2,+,\cdot\rangle$ - талаа болорун көрсөтүү керек. Далилдөө үчүн төмөнкү аныктамаларды киргизели:

***1-аныктама.*** $\langle a,b\rangle+\langle c,d\rangle=\langle a+c,b+d\rangle,$ мында $\langle a+c,b+d\rangle \in R^2$.

***2-аныктама.*** $\langle a,b\rangle\cdot\langle c,d\rangle=\langle ac-bd,ad+bc\rangle,$ мында $\langle ac-bd,ad+bc\rangle \in R^2$, $\langle R^2,+,\cdot\rangle = Q$ болот.

Жогорудагы аныктоолорду колдонуп, шарттарды текшерүүгө болот. Мисалы, 1-шарт үчүн

$$P-1^0.\ \forall\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle \in R^2: \langle a,b\rangle+\langle c,d\rangle=\langle a+c,b+d\rangle = \langle c+a,d+b\rangle=\langle c,d\rangle+\langle a,b\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle a,b\rangle+\langle c,d\rangle=\langle c,d\rangle+\langle a,b\rangle,$$

2-шарт үчүн: $\langle 0,0\rangle \in R^2$ алынат,

4-шарт үчүн: $\forall\langle a,b\rangle \in R^2: \exists\langle -a,-b\rangle \in R^2,$

8-шарт үчүн: $\langle 1,0\rangle \in R^2,$

9-шарт үчүн: $\langle a,b\rangle^{-1}=\left\langle \frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right\rangle \in R^2.$

Жогоркулардан $\langle R^2, +, \cdot \rangle$ - талаа болоору далилденет.

Бул мисалды теорема катары да алууга болот.

***Теорема.*** *$Z_p$ талаа болот (мында $p$ - жөнөкөй сан).*

Группадагы сыяктуу талаанын морфизмдерине да аныктоо берүүгө болот. Мында талаалардын изоморфизмдерине гана токтолобуз.

Айталы $P$ жана $P'$ талаалары берилсин.

***Аныктама.*** *Эгерде $P$ көптүгүн $P'$ көптүгүнө биективдүү чагылтуу жашап, төмөнкү шартты канааттандырса:*
$\forall a,b \in P$:

$$f(a+b) = f(a) + f(b),$$
$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b),$$

*анда $P$ жана $P'$ талаалары - изоморфтуу талаалар деп аталат. Бул учурда $f$ изоморфизм деп аталат.*

Талаалардын изоморфтуулугу төмөнкүдөй касиеттерге ээ:

*$1^0$. Изоморфтуу бардык талаалар көптүгүндө аныкталган эквиваленттик катыш болот.*

*$2^0$. Талаалардын изоморфтуулугунда карама-каршы элемент карама-каршы элементке, тескери элемент тескери элементке өтөт.*

*$3^0$. Талаалардын изоморфтуулугунда нөлдүк элемент нөлдүк элементке өтөт.*

*$4^0$. $P$ талаа болсун. $P$ жана $P'$ көптүктөрү изоморфтуу болсо, анда $P'$ да талаа болот.*

***Аныктама.*** *$A$ көптүгү $P$ талаасынын камтылуучу көптүгү жана $A$ көптүгү талаа болсо, анда $A$ көптүгү $P$ талаасынын камтылуучу талаасы деп аталат:*

$$A \underset{талаа}{\subset} P \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1)\ A \subset P, \\ 2)\ A - талаа. \end{cases}$$

# 3-ГЛАВА. КОМПЛЕКСТИК САНДАРДЫН ТАЛААСЫ

## 3.1. Комплекстик сандардын аныктамасы

Чыныгы сандардын талаасын кеңейтүү маселелерин бир нече мисалдар менен негиздөөгө болот. Мисалы, чыныгы сандар талаасында

$$x^2+1=0 \qquad (1)$$

теңдемесинин тамыры жашабайт, анткени квадраты терс сан болгон, б.а. $x^2=-1$ барабардыгын канааттандыруучу чыныгы сан жашабайт.

*Аныктама. Комплекстик сандар деп чыныгы сандардын иреттелген $(a,b)$ түрүндөгү түгөйлөрүн (компоненталарын) айтабыз жана алардын барабардыгы, суммасы, көбөйтүндүсү жана кээ бир түгөйлөрдүн чыныгы сандар менен дал келиши төмөнкү аксиомалар менен аныкталат:*

1°. *$(a,b)$ жана $(c,d)$ түгөйлөрү барабар деп аталат, эгерде алардын тиешелеш компоненталары барабар болсо гана, б.а.*

$$(a,b)\overset{def}{=}(c,d)\Leftrightarrow\begin{cases}a=b,\\ c=d.\end{cases}$$

2°. *$(a,b)$ жана $(c,d)$ түгөйлөрүнүн суммасы деп $(a+c,b+d)$ түгөйүн айтабыз, б.а.*

$$(a,b)+(c,d)\overset{def}{=}(a+c,\,d+d).$$

3°. *$(a,b)$ жана $(c,d)$ түгөйлөрүнүн көбөйтүндүсү деп $(ac-bd,\,ab+bc)$ түгөйүн айтабыз, б.а.*

$$(a,b)(c,d)\overset{def}{=}(ac-bd,ad+cd).$$

4°. *$(a,0)$ түгөйү $a$ чыныгы саны менен дал келет, б.а.*

$$(a,0)\overset{def}{=}a.$$

*Комплекстик сандардын мындай аксиоматикалык аныктамасы карама-каршылыксыз жана толук болуп эсептелет.*

Комплекстик сандардын көптүгүн $C$ тамгасы менен белгилейбиз. Жөнөкөйлүк үчүн $(a,b)$ комплекстик санын $z$ менен белгилеп алууга болот, б.а. $z=(a,b)$. 4°-касиеттен чыныгы сандардын көптүгү комплекстик сандардын көптүгүнүн камтылуучу көптүгү болот, б.а. $R\subset C$.

Комплекстик сандардын көптүгүндө $(0,1)$ түгөйү негизги мааниге ээ жана аны $i$ тамгасы менен белгилейбиз, б.а. $i=(0,1)$. Бул санды мнимый (жорума) сан деп атайбыз. Анын квадраты $-1$ чыныгы санына барабар экендигин далилдөөгө болот. Чындыгында эле 3° жана 4° аксиомаларды колдонуу менен $i^2=(0,1)(0,1)=(0-1,0+0)=(-1,0)=-1$ алабыз. Демек,

$$i^2=-1. \qquad (2)$$

Эгерде (2) барабардыкты эске алсак, анда (1) теңдемени $x^2 = i^2$ деп жазып алууга болот. Мындан, (1) теңдеменин эки комплекстик тамырынын жашай тургандыгын аныктайбыз: $x_1 = i, x_2 = -i$. Демек, комплекстик сандардын көптүгүндө (1) теңдеменин тамырлары жашайт.

### 3.2. Комплекстик сандардын алгебралык формасы

Эгерде каалаган $(b,0) = b$ түрүндөгү чыныгы санга $i = (0,1)$ мнимый санын көбөйткөндө $(0,b)$ түрүндөгү комплекстик сан келип чыгаарын далилдейли. Чындыгында эле, 3° аксиоманын негизинде $(b,0)(0,1) = (0-0, b+0) = (0,b)$ болот, б.а.

$$(b,0)(0,1) = (0,b) \tag{3}$$

Анда 2° аксиоманын жана (3) барабардыктын негизинде

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)(0,1) = a + bi$$

алабыз, б.а. каалагандай $z = (a,b)$ комплекстик санын төмөнкүдөй жазууга болот:

$$z = a + bi \tag{4}$$

Комплекстик сандардын (4) формула менен аныкталган түрүн комплекстик сандардын алгебралык формасы деп атайбыз. $a$ саны комплекстик-сандардын чыныгы бөлүгү, ал эми $b$ саны – мнимый (жорума) бөлүгү деп аталат жана алар төмөнкүдөй белгиленет: $a = Re\, z$, $b = Jm\, z$.

### 3.3. Комплекстик сандардын талаасын түзүү

Берилген $z = a + bi$ комплекстик санын абсциссасы $a$, ординатасы $b$ болгон тегиздиктеги $M(a,b)$ чекити менен мүнөздөөгө болот, б.а. комплекстик сандардын көптүгү болгон $C$ көптүгүнө тегиздиктеги чекиттердин көптүгү болгон $R^2$ көптүгүн (талаасын) өз ара бир маанилүү тиешелештикке коюуга болот.

***Аныктама.*** *$R^2$ көптүгүнө изоморфтуу болгон сандык талааны комплекстик сандардын талаасы деп атайбыз.*

Айталы, $f$ чагылтуусу жашасын жана $f: R^2 \to C$ болсун. (1) теңдемени карайлы. Аны $R^2$ көптүгүндө төмөнкүчө жазууга болот:

$$\langle x, y\rangle^2 + \langle 1,0\rangle = \langle 0,0\rangle.$$

Бул теңдеменин чечими $\langle 0,1\rangle$ түгөйү боло тургандыгын көрсөтөлү: $\langle 0,1\rangle^2 + \langle 1,0\rangle = \langle 0,0\rangle$. Эгерде $\langle 0,1\rangle^2 = \langle -1,0\rangle$ экендигин эске алсак, анда $\langle -1,0\rangle + \langle 1,0\rangle = \langle 0,0\rangle$ болот. Демек, $\langle 0,1\rangle$ түгөйү (1) теңдеменин чечими болот.

Жогоруда айтылгандардын негизинде $f$ изоморфизминде $\langle 0,1\rangle$ түгөйү (1) теңдеменин чечимине өтүшү керек. Ал чечимди $i$ менен белгилейли:

$$f(\langle 0,1\rangle)=i,$$

мында $i$ - мнимый бирдик деп аталат.

$$\forall a\in R:\ f(\langle a,0\rangle)=a$$

болсун.

Эми $C$ талаасынын элементи кандай көрүнүштө болушун табалы:

$$\forall\langle a,b\rangle\in R^2: f(\langle a,b\rangle)=f(\langle a,0\rangle+\langle 0,b\rangle)=f(\langle a,0\rangle)+f(\langle 0,b\rangle)=$$

$$=a+f(\langle b,0\rangle\cdot\langle 0,1\rangle)=a+bi$$

Ошентип, $f(\langle a,b\rangle)=a+bi\in C$ болору келип чыгат:

$$C=\{a+bi/\,a,b\in R, i^2=-1\}.$$

Алгебралык формадагы комплекстик сандын үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдар төмөнкү эрежелердин негизинде аткарылат.

**1. Кошуу.** *Сумманын чыныгы бөлүгү чыныгы бөлүктөрдүн суммасына, мнимый бөлүгү мнимый бөлүктөрдүн суммасына барабар, б.а.*

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i.$$

**2. Кемитүү.** *Айырманын чыныгы бөлүгү чыныгы бөлүктөрдүн айырмасына, мнимый бөлүгү мнимый бөлүктөрдүн айырмасына барабар, б.а.*

$$(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i.$$

**3. Көбөйтүү.**

$$(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2-a_2b_1)i.$$

**4. Түйүндөшүн табуу.** $z=a+bi$ *комплекстик санынын түйүндөшү* $\bar z=a-bi$ *болот.*

**5. Бөлүү.** Эгерде $z_1=a_1+ib_1$ *жана* $z_2=a_2+ib_2$ *болсо, анда*

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}\cdot\frac{a_2-ib_2}{a_2-ib_2}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_1b_2-a_2b_1)i}{a^2+b^2}=$$

$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)}{a^2+b^2}-\frac{a_2b_1+a_1b_2}{a^2+b^2}i.$$

**6. Тамыр чыгаруу.**

$$\sqrt{z}=\sqrt{a+bi}=\pm\Big(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+i\,sign\,b\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\Big), \qquad (5)$$

мында $sign\,b=\begin{cases}1, \text{ эгерде } b>0,\\ -1, \text{ эгерде } b<0.\end{cases}$

Далилдөө.

$$\sqrt{a+bi}=x+iy \qquad (6)$$

болсун деп алалы, мында $x$, $y$ белгисиз чыныгы сандар. Анда

$$a+bi=(x+iy)^2 \Rightarrow a+bi=(x^2-y^2)+2xyi.$$

Комплекстик сандардын барабардыгы жөнүндөгү аксиоманын негизинде төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{cases} a=x^2-y^2 \\ b=2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=(x^2-y^2)^2 \\ b^2=4x^2y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=x^2-y^2 \\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}},\ y=\pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

Ошентип, табылган $x$, $y$ маанилерин (6) формулага койсок, анда (5) келип чыгат. Талап кылынган далилденди.

**Мисал.** $\sqrt{3-4i}=\pm\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{9+16}}{2}}-i\sqrt{\frac{-3+5}{2}}\right)=\pm(2-i).$

Текшерүү: $(\pm(2-i))^2=4-4i+i^2=3-4i.$

### 3.4. Комплекстик сандын геометриялык сүрөттөлүшү жана тригонометриялык формасы

Комплекстик сандар талаасын карайлы. Аныктама боюнча $C\cong R^2$. Ал эми $R^2$ талаасына декарттык координаталар системасына карата тегиздиктеги чекиттердин көптүгү изоморфтуу. Изоморфтуулук транзитивдүүлүк касиетине ээ болгондуктан, декарттык координаталар системасына карата комплекстик сандар талаасы тегиздиктеги чекиттердин көптүгүнө изоморфтуу болот, башкача айтканда декарттык координаталар системасына карата каалаган комплекстик санга тегиздиктин анык бир чекити тиешелештикке коюлат жана тескерисинче.

$z=a+bi\in C$ комплекстик санына абциссасы $a$ (чыныгы бөлүгүнө барабар), ординатасы $b$ (мнимый бөлүгүнө барабар) болгон чекит тиешелештикке коюлат. Ошондуктан кээ бир окуу китептеринде $OX$ огун чыныгы ок, $OY$ огун мнимый ок деп аташат.

Эгерде тегиздикте "полярдык координаталар системасы" түшүнүгүн киргизсек: $OX$ огун - полярдык ок катары алабыз. Ал эми чекиттин радиус векторунун узундугун $\rho$ менен белгилесек, анда полярдык координата системасы тегиздиктин каалаган чекитине $(\rho,\varphi)$ сандарын тиешелештикке коет.

$$\varphi=(OX)^\wedge\overline{OZ},\ \begin{cases} 0\le\rho<+\infty, \\ 0\le\varphi<2\pi. \end{cases}$$

**Мисал.** $(2,\frac{\pi}{3})$ түгөйүнө туура келүүчү чекитти табалы.

Полярдык координаталар системасында $OX$ - полярдык ок, $O$ - полярдык уюл, $\overline{OZ}$ - полярдык вектор, $\rho$ - полярдык радиус, $\varphi$ - полярдык бурч деп аталат.

Полярдык координаталар менен декарттык координаталардын ортосунда төмөнкүдөй байланыш бар:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2},\ cos\,\varphi = \frac{a}{\rho},\ sin\,\varphi = \frac{b}{\rho},$$

мында $\rho$ - комплекстик сандын модулу, $\varphi$ - комплекстик сандын аргументи деп аталат, б.а.

$$|z| = \rho,\ arg\,z = \varphi.$$

Демек, алгебралык формада берилген комплекстик сандын модулу менен аргументи төмөнкү формула менен табылат:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},\ cos\,\varphi = \frac{a}{|z|},\ sin\,\varphi = \frac{b}{|z|}. \qquad (7)$$

**Мисал.** $z = 1 - i$ комплекстик санынын модулун жана аргументин табалы.

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ боюнча $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, анда (7) формуланын негизинде

$$cos\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad sin\,\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4},\ \varphi = arg\,z = \frac{7\pi}{4}.$$

Ошентип, каалаган комплекстик санды анын модулу жана аргументине жараша тегиздикте бир маанилүү түрдө сүрөттөөгө болот. Бул учурда комплекстик сан геометриялык жактан сүрөттөлдү деп аталат.

(7) формуладан $z = a + bi$ комплекстик саны үчүн төмөнкүгө ээ болобуз:

$$z = |z|(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi) \qquad (8)$$

Комплекстик сандын (8) түрдөгү формасы комплекстик сандын тригонометриялык формасы деп аталат.

Мисалы, $z = 1 - i$ комплекстик санынын тригонометриялык формасы:

$$z = |z|(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi) = \sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{4} + i\,sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

болот.

### 3.5. Тригонометриялык формадагы комплекстик сандардын үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдар

**I. Көбөйтүү жана бөлүү.** Айталы

$$z_1 = |z_1|(cos\,\varphi_1 + i\,sin\,\varphi_1),\ z_2 = |z_2|(cos\,\varphi_2 + i\,sin\,\varphi_2)$$

комплекстик сандары берилсин.

*Тригонометриялык формадагы комплекстик сандарды көбөйтүү үчүн алардын модулдарын көбөйтүп, аргументтерин кошуу керек, б.а.*

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| [cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\, sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

*Ал эми тригонометриялык формадагы комплекстик сандарды бөлүү үчүн алардын модулдарын бөлүп, аргументтерин кемитип коюу керек, б.а.*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\, sin(\varphi_1 - \varphi_2)]..$$

**II. Даражага көтөрүү.** $z = |z|(cos\,\varphi + i\, sin\,\varphi)$ *комплекстик санын даражага көтөрүү төмөнкү Муаврдын формуласы деп аталган формуланын жардамында табылат:*

$$z^n = |z|^n (cos\, n\varphi + i\, sin\, n\varphi),$$

*б.а. айтканда тригонометриялык формадагы комплекстик санды $n$-даражага көтөрүү үчүн анын модулун $n$-даражага көтөрүп, аргументин $n$ ге көбөйтүү керек.*

Бул формуланын тууралыгын далилдейли. Ал үчүн толук математикалык индукция методун колдонобуз, б.а.

1) $n = 2$ үчүн текшеребиз. $z^2 = |z|^2 (cos\,2\varphi + i\, sin\,2\varphi)$, бул көбөйтүүдөн келип чыгат.

2) $n = \kappa$ үчүн туура деп болжолдоп алып: $z^\kappa = |z|^\kappa (cos\,\kappa\varphi + i\, sin\,\kappa\varphi)$, $n = \kappa + 1$ үчүн текшеребиз:

$$z^{\kappa+1} = |z|^{\kappa+1}(cos(\kappa+1)\varphi + i\, sin(\kappa+1)\varphi) = |z|^k (cos\,\kappa\varphi + i\, sin\,\kappa\varphi)|z|(cos\,\varphi + i\, sin\,\varphi) =$$
$$= |z|^{k+1}(cos(\kappa+1)\varphi + i\, sin(\kappa+1)\varphi).$$

Демек, каалагандай натуралдык сан үчүн туура болот.

**Мисал.** $z = 1 - i = \sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{4} + i\, sin\frac{7\pi}{4}\right)$,

$$z^n = (\sqrt{2})^n \left(cos\frac{7\pi}{4}n + i\, sin\frac{7\pi}{4}n\right).$$

$$n = 8: \quad z^8 = (\sqrt{2})^8 \left(cos\frac{7\pi}{4}8 + i\, sin\frac{7\pi}{4}8\right) = 16(cos\,14\pi + i\, sin\,14\pi) = 16,$$

$(i - 1)^8 = 16$.

**III. Тамыр чыгаруу.** $z$ *санынын $n$-даражалуу тамырлары төмөнкү формула боюнча аныкталат:*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|(cos\,\varphi + i\, sin\,\varphi)} = \sqrt[n]{|z|}\left[cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\, sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right], \; k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Далилдөө. $\sqrt[n]{|z|(cos\,\varphi + i\, sin\,\varphi)} = r(cos\,\psi + i\, sin\,\psi)$ теңдемесиндеги $r, \psi$ белгисиздерин табалы. Ал үчүн теңдеменин эки жагын тең $n$-даражага көтөрөбүз:

$$|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi),$$

$$\begin{cases} r^n=|z|, \\ n\psi=\varphi+2\pi m,\ m\in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt[n]{|z|}, \\ \psi=\dfrac{\varphi+2\pi m}{n},\ m\in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt[n]{|z|}, \\ \psi=\dfrac{\varphi+2\pi(nq+k)}{n}, \end{cases}$$

мында $m=nq+k,\ 0\le k\le n$. Демек,

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}+2\pi q\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}+2\pi q\right)\right]=$$

$$=\sqrt[n]{|z|}\left[\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right],$$ б.а.

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left[\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right].$$

**Мисал.** Бирдин кубдук тамырларын тапкыла.

$$\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{(\cos 0+i\sin 0)}=\cos\frac{\varphi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{3}.$$

Эгерде $k=0$ болсо, анда $\varepsilon_0=1$ болот. Эгерде $k=1$ болсо, анда $\varepsilon_1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Эгерде $k=2$ болсо, анда $\varepsilon_2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Демек, бирдин кубдук тамырлары $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2$ болот.

### 3.6. Бирдин $n$-даражалуу тамырлары

$$\sqrt[n]{1}=\sqrt[n]{(\cos 0+i\sin 0)}=\cos\frac{\varphi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{3}.$$

***Аныктама.*** *Эгерде $\varepsilon_\kappa$ нын эң кичине оң даражасы бирге барабар болсо, анда $\varepsilon_\kappa$ бирдин алгачкы тамыры (АТ) деп аталат.*

Мисалы, $n=3$ болгон учурда $\varepsilon_1$ же $\varepsilon_2$ - бирдин алгачкы тамыры. Алгачкы тамырдын аныктоосу боюнча: Эгерде $\varepsilon_\kappa(AT)\sqrt[n]{1}$ болсо, анда $\varepsilon_\kappa^n=1$ болот.

$$A=\{\varepsilon_\kappa^m\ /\ m\in Z,\varepsilon_k(AT)\sqrt[n]{1}\}=\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{n-1}\}.$$

**Теорема.** *$A$ көптүгү циклдык группа болот.*

$$\forall\varepsilon_\kappa^{m_1},\varepsilon_\kappa^{m_2}\in A:\varepsilon_\kappa^{m_1}\cdot\varepsilon_\kappa^{m_2}=\varepsilon_\kappa^{m_1+m_2}\in A,\ \forall\varepsilon_\kappa^m\in A,\ m\in Z\Rightarrow -m\in Z:\varepsilon_\kappa^{-m}\in A.$$

Ошентип, бирдин $n$-даражалуу тамырларынын көптүгү группа болот экен.

Бирдин $n$-даражалуу тамырлары төмөнкүдөй геометриялык мааниге ээ: *бирдин $n$-даражалуу тамырларына координаталык тегиздикте туура келүүчү чекиттер борбору координата башталышы менен дал келген, радиусу бирге барабар болгон айланага ичтен сызылган туура $n$ бурчтуктун чокулары менен дал келишет.*

## 4-ГЛАВА. КОРДАНО-ТАРТАЛЯНЫН ЖАНА ФЕРРО-ФЕРРАРИНИН ФОРМУЛАЛАРЫ

### 4.1. Үчүнчү даражадагы теңдемелерди чыгаруу

Комплекстик сандардын талаасында берилген үчүнчү даражадагы бир белгисиздүү теңдеме жалпы учурда төмөнкүдөй жазылат:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \tag{1}$$

мындагы $a_0 \neq 0,\ a_i\ (i = \overline{1,3})$ - комплекстик сандары теңдеменин коэфициенттери деп аталат.

Эгерде

$$x = y - \frac{a_1}{3a_0} \tag{2}$$

формуласынын жардамы менен өзгөрмөнү алмаштырсак, анда (1) теңдеме төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$y^3 + py + q = 0, \tag{3}$$

мында $p = \dfrac{1}{a_0}\left(a_2 - \dfrac{a_1^2}{3a_0}\right), q = \dfrac{1}{a_0}\left(a_3 - \dfrac{a_1a_2}{3a_0} + \dfrac{2a_1^3}{27a_0^2}\right)$. Бул теңдеме толук эмес кубдук теңдеме деп аталат.

Тарталя XVI кылымда толук эмес кубдук теңдемени төмөнкү жол менен чечкен. Теңдеменин тамырын

$$y = u + v \tag{4}$$

көрүнүшүндө издейбиз. Анда (3) теңдемеден

$$u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0 \tag{5}$$

алабыз. (5) теңдеменин тамырларын табуу үчүн $3uv + p = 0$ болсун деп алалы. Анда

$$uv = -\frac{p}{3} \tag{6}$$

болот. (6) шарт орун алганда (5) ден $u^3 + v^3 + q = 0$ келип чыгат. Эгерде (6) барабардыктын эки жагын тең кубка көтөрсөк, анда $u$ жана $v$ белгисиздерине карата төмөнкү системага келебиз:

$$\begin{cases} u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27}, \\ u^3 + v^3 = -q. \end{cases} \tag{7}$$

Эгерде

$$u^3 = z_1,\ v^3 = z_2 \tag{8}$$

деп белгилөө жүргүзсөк анда (7) системадан Виеттин теоремасы боюнча төмөндөгү квадраттык теңдемеге ээ болобуз:

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0.$$

Бул теңдеменин тамырлары

$$z_{1,2}=-\frac{q}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

болгондуктан (8) белгилөөлөрдү эске алып

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},\ v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \qquad (9)$$

формулаларын алабыз. Эгерде $u$ жана $v$ белгисиздеринин маанилерин (6) шарт орун ала тургандай кылып тандап алсак, анда (4) формуланын негизинде

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \qquad (10)$$

формуласын алабыз. Бул формула Кордано-Тарталянын формуласы деп аталат.

Жалпы учурда (3) теңдеменин тамырлары төмөнкү формулалар боюнча аныкталат:

$$\begin{aligned} y_1&=u_1+v_1,\\ y_2&=u_1\omega_1+v_1\omega_2,\\ y_3&=u_1\omega_2+v_1\omega_1, \end{aligned} \qquad (11)$$

мында $\omega_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \omega_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ сандары $1$ дин кубдук тамырлары, ал эми $u_1$ жана $v_1$ лер (6) шартты канааттандыруучу жана (9) формулалар боюнча аныкталуучу тамырлардын маанилери.

**Мисал.** $y^3+(3-3i)y+(-2+i)=0$ теңдемесинин тамырларын тапкыла. Чыгаруу. $p=3-3i,\ q=-2+i$ болгондуктан (10) формула боюнча

$$y=\sqrt[3]{1-\frac{i}{2}+\sqrt{(1-\frac{i}{2})+(1-i)^3}}+\sqrt[3]{1-\frac{i}{2}-\sqrt{(1-\frac{i}{2})+(1-i)^3}}=$$

$$=\sqrt[3]{1-\frac{i}{2}+\sqrt{-\frac{5}{4}-3i}}+\sqrt[3]{1-\frac{i}{2}-\sqrt{-\frac{5}{4}-3i}}=$$

$$=\sqrt[3]{1-\frac{i}{2}+(\frac{3}{2}i-1)}+\sqrt[3]{1-\frac{i}{2}-(\frac{3}{2}i-1)}=\sqrt[3]{i}+\sqrt[3]{2-2i}$$

алабыз. Кубдук тамырларды табууда (6) шарттын орун алышын, б.а. $-\frac{p}{3}=-1+i$ барабардыгынын аткарылышын камсыз кылуубуз керек. Ошондуктан биринчи тамырдын мааниси үчүн $-i$ ни, ал эми экинчи тамырдын мааниси үчүн $-1-i$ алуу керек. Анда (11) формула боюнча

$$y_1 = -i + (-1 - i) = -1 - 2i,$$

$$y_2 = -i\omega_1 + (-1 - i)\omega_2 = \frac{1}{2} + (\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)i,$$

$$y_1 = -i\omega_2 + (-1 - i)\omega_1 = \frac{1}{2} + (-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)i$$

алабыз.

### 4.2. Төртүнчү даражадагы теңдемелерди чыгаруу

Комплекстик сандардын талаасында берилген төртүнчү даражадагы бир белгисиздүү теңдеме жалпы учурда төмөнкүдөй жазылат:

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0, \qquad (1)$$

мындагы $a_0 \neq 0, a_i (i = \overline{1,4})$ - комплекстик сандары теңдеменин коэфициенттери деп аталат.

Кордано-Тарталянын формуласы жазылгандан кийин эле Ферро жана Феррари төртүнчү даражалуу теңдемелердин тамырларын табуу жолун тапкан. Ал үчүн (1) теңдеменин сол жагын эки толук квадраттын айырмасы түрүндө жазып алуу керек. (1) теңдеменин эки жагын тең $a_0$ гө бөлүп жиберип

$$x^4 + \grave{a}x^3 + bx^2 + \tilde{n}x + d = 0, a = \frac{a_1}{a_0}, b = \frac{a_2}{a_0}, c = \frac{a_3}{a_0}, d = \frac{a_4}{a_0}$$

теңдемесин алабыз. Бул теңдемени төмөнкүдөй жазып алууга болот:

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = \left(b - \frac{a^2}{4}\right)x^2 + cx + d.$$

Барабардыктын сол жагындагы толук квадраттын ичине $\frac{y}{2}$ ($y$ - жардамчы белгисиз) туюнтмасын кошуп жана кемитип жиберип

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 + 2\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)\frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} = \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)y + \frac{y^2}{4} - \left[\left(b - \frac{a^2}{4}\right)x^2 + cx + d\right] = 0$$

алабыз. Аны

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = Ax^2 + Bx + C, \qquad (2)$$

түрүндө жазып алууга болот, мында $A = \frac{a^2}{4} + y - b, B = \frac{a}{2}y - c, C = \frac{y^2}{4} - d.$

(2) теңдеменин оң жагы толук квадратты бериши үчүн анын дискриминанты нөлгө барабар болушу керек:

$$B^2 - 4AC = \left(\frac{a}{2}y - c\right)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} + y - b\right)\left(\frac{y^2}{4} - d\right) = 0. \qquad (3)$$

(3) теңдеме $y$ белгисизине карата үчүнчү даражадагы теңдеме болуп эсептелет. Кашааларды ачып жиберүү менен аны төмөнкүдөй жазууга болот:

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - (c^2 + a^2 d - 4bd) = 0. \qquad (4)$$

Бул теңдеме кубдук резольвента деп аталат. Эгерде (4) теңдеменин кандайдыр бир тамырын $y_1$ менен белгилесек, анда (2) теңдеме төмөндөгү көрүнүшкө келет:

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{A_1}\,x + \frac{B_1}{2\sqrt{A_1}}\right)^2, \qquad (5)$$

мында $A_1 = \dfrac{a^2}{4} + y_1 - b,\ B_1 = \dfrac{a}{2}y_1 - c.$ Бул теңдемеден төмөнкү квадраттык теңдемелер системасын алабыз:

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{ax}{2} + \dfrac{y_1}{2} = \sqrt{A_1}\,x + \dfrac{B_1}{2\sqrt{A_1}}, \\ x^2 + \dfrac{ax}{2} + \dfrac{y_1}{2} = -\sqrt{A_1}\,x - \dfrac{B_1}{2\sqrt{A_1}}. \end{cases} \qquad (6)$$

(6) системадан (1) теңдеменин бардык төрт тамырын таба алабыз.

**Мисал.** $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x - 3 = 0$ теңдемесинин чечимин тапкыла. Чыгаруу. Бул учурда $a = 2, b = 2, c = 6, d = -3$ болгондуктан (4) теңдеме (кубдук резольвента) төмөнкүдөй жазылат:

$$y^3 - 2y^2 + 24y - 48 = 0$$

Тандоо жолу менен бул теңдеменин тамырларынын бирөөсү $y_1 = 2$ болоорун байкоого болот. Анда $A_1 = 1, B_1 = -4$ болгондуктан берилген теңдеме үчүн (6) системанын негизинде $\begin{cases} x^2 + x + 1 = x - 2, \\ x^2 + x + 1 = -x + 2 \end{cases}$ же $\begin{cases} x^2 = -3, \\ x^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases}$ алабыз.

Демек, теңдеменин чечимдери төмөнкүдөй болот:

$$x_{1,2} = \pm i\sqrt{3},\ x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

# 5-ГЛАВА. КӨП МҮЧӨЛӨР ЖАНА АЛАРДЫН ТАМЫРЛАРЫ

## 5.1. Бир өзгөрмөлүү көп мүчөлөрдүн алкагы

Айталы, $K=\langle +,\cdot,1\rangle$ - коммутативдик, ассоциативдик алкак болсун. $K$ алкагынын элементтеринен төмөндөгүдөй удаалаштыктарды түзөлү:

$$f=\langle a_0,a_1,...,a_n,...\rangle, \qquad g=\langle b_0,b_1,...,b_n,...\rangle.$$

Бул удаалаштыктардын чектүү элементтеринен башка бардык элементтери нөлдүк элементтерге барабар болсун. Удаалаштыктын көптүгүн $K^{\bullet}$ менен белгилейли жана $K^{\bullet}$ көптүгүндө кошуу жана көбөйтүү амалдарын төмөндөгүдөй аныктайлы:

$$\forall f,g\in K^{\bullet}: \qquad f+g=\langle a_0+b_0,a_1+b_1,..., a_n+b_n,...\rangle,$$

$$f\cdot g=\langle c_0,c_1,...,c_n,...\rangle = a_0b_n+a_1b_{n-1}+...+a_nb_0=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}.$$

**Теорема.** *$K^{\bullet}$ көптүгү жогоруда аныкталган амалдарга карата алкак болот.*

Далилдөө. $K^{\bullet}$ көптүгүнүн "+" жана "×" амалдарына карата алгебра болушун көрсөтүү аныктамадан келип чыгат. Эгерде

$$f=\langle a_0,a_1,...,a_n,...\rangle,\ g=\langle b_0,b_1,...,b_n,...\rangle,\ h=\langle \tilde{n}_0,\tilde{n}_1,...,\tilde{n}_n,...\rangle$$

болсо, анда

$$f+(g+h)=(f+g)+h,$$

$$\begin{aligned}
f+(g+h)&=\langle a_0,a_1,...,a_n,...\rangle+(\langle b_0,b_1,...,b_n,...\rangle+\langle c_0,c_1,...,c_n,...\rangle)=\\
&=\langle a_0,a_1,...,a_n,...\rangle+\langle b_0+c_0,b_1+c_1,...,b_n+c_n,...\rangle=\\
&=\langle a_0+(b_0+c_0),a_1+(b_1+c_1),...,a_n+(b_n+c_n),...\rangle=\\
&=\langle a_0+b_0+c_0,a_1+b_1+c_1,...,a_n+b_n+c_n,...\rangle=\\
&=\langle (a_0+b_0)+c_0,(a_1+b_1)+c_1,...,(a_n+b_n)+c_n,...\rangle=\\
&=\langle (a_0+b_0),(a_1+b_1),...,(a_n+b_n),...\rangle=\langle c_0,c_1,...,c_n,...\rangle=\\
&=(\langle a_0,a_1,...,a_n,...\rangle+\langle b_0,b_1,...,b_n,...\rangle)+\langle c_0,c_1,...,c_n,...\rangle=(f+g)+h.
\end{aligned}$$

Ушул сыяктуу эле "+" амалына карата коммутативдик экенин көрсөтүүгө болот. $0=\langle 0,0,...,0,...\rangle,\ 0\in K^{\bullet}$ - нөлдүк элемент, ал эми $f=\langle a_0,a_1,...,a_n,...\rangle$ элементине карама-каршы элемент $-f=\langle -a_0,-a_1,...,-a_n,...\rangle$ болсун. Көбөйтүүнүн кошууга карата дистрибутивдик экенин төмөнкүдөй көрсөтүүгө болот:

$$(f+g)\cdot h=fh+gh,\ \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)c_{n-i}=\sum_{i=0}^{n}a_ic_{n-i}+\sum_{i=0}^{n}b_ic_{n-i},$$

Бул $K$ нын алкак болушунан келип чыгат. Жогоркулардын негизинде талап кылынган ырастоо далилденди. Ал эми $K^{\bullet}$ нын коммутативдик, ассоциативдик алкак болушу көбөйтүүнүн аныктамасынан келип чыгат.

Эгерде, $K$ бирдик элементи бар коммутативдик, ассоциативдик алкак болсо, анда $K^{\bullet}$ бирдик элементи бар коммутативдик, ассоциативдик алкак болот.

$K^{\bullet}$ төмөндөгүдөй удаалаштыктарды карап, андагы кошууну жана көбөйтүүнү аныктайлы:

$$f = \langle a,0,\dots,0,\dots\rangle \in K^{\bullet},\ g = \langle b,0,\dots,0,\dots\rangle \in K^{\bullet},$$

$$f + g \overset{def}{=} \langle a+b,0,\dots,0,\dots\rangle,\ f \cdot g \overset{def}{=} \langle ab,0,\dots,0,\dots\rangle.$$

Булардан $K \underset{алкак}{\subset} K^{\bullet}$ болору келип чыгат.

$X$ аркылуу $\langle 0,1,0,0,\dots\rangle$ белгилеп жана $X$ ти $K$ алкагында өзгөрмө же белгисиз деп атап, көбөйтүүнүн аныктамасынан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$X = \langle 0,1,0,0,\dots\rangle,$$

$$X^2 = \langle 0,0,1,0,\dots\rangle,$$

$$X^3 = \langle 0,0,0,1,0,0,\dots\rangle,$$

........................

$$X^n = \langle 0,0,0,0,\dots,1,\dots\rangle,$$

Анда $f = \langle f_0, f_1,\dots, f_n,\dots\rangle = \langle a_0,0,\dots,0,\dots\rangle + \langle 0,a_1,0,\dots,0,\dots\rangle + \langle 0,0,a_2,0,\dots,0,\dots\rangle +$
$+ \dots + \langle 0,0,\dots,0,a_n,0,\dots\rangle = f_0 + f_1X + f_2X^2 + \dots + f_nX^n =$
$= a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n.$

Ошентип, $K^{\bullet}$ ны төмөндөгүчө жазса болот:

$K^{\bullet} = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n + \dots / \forall i : a_i \in K \wedge n \in N_0\},\ N_0 = \{0,1,2,\dots\}.$

***Аныктама.*** *$K^{\bullet}$ көптүгү бир өзгөрмөлүү көп мүчөлөрдүн алкагы, ал эми $f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$ - бир өзгөрмөлүү көп мүчө деп аталат, мында $a_i$, $(i = \overline{0,n})$ - көп мүчөнүн коэффициенти.*

*Эгерде $a_n \neq 0$ болсо, анда $f(X)$ $n$-даражалуу көп мүчө деп аталат жана анын даражасы $\deg f(X) = n$ түрүндө жазылат.*

Коэффициенти $K$ алкагынан алынган бир өзгөрмөлүү көп мүчөлөрдүн алкагын $K(X)$ аркылуу белгилейбиз. $f(X)$ көп мүчөсүнүн $X = \alpha$ болгондогу мааниси төмөнкүдөй жазылат:

$$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_n\alpha^n$$

## 5.2. Горнердин схемасы жана Безунун теоремасы

$K(x)$ алкагынан алынган $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ көп мүчөсүн карайлы.

***Теорема.*** *$K$ алкагында*

$$f(x) = (x - c)q(x) + r \qquad (1)$$

*барабардыгы орун ала тургандай $r$ жана $q(x)$ элементтери жашайт.*

Далилдөө. $q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+...+b_{n-1}$,

$$f(x)=(x-c)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+...+b_{n-1})+r=$$
$$=b_0x^n+(b_1-cb_0)x^{n-1}+(b_2-cb_1)x^{n-2}+...+r-cb_{n-1}=$$
$$=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n,$$

мындан төмөндөгүлөргө ээ болобуз:

$$\begin{cases} a_0=b_0, \\ a_1=b_1-cb_0, \\ a_2=b_2-cb_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n=r-cb_{n-1}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0=a_0, \\ b_1=a_1+ca_0, \\ b_2=a_2+c(a_1+ca_0), \\ \dots\dots\dots\dots \\ r_n=a_n+cb_{n-1}. \end{cases}$$

| | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | ... | $a_{n-1}$ | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c$ | $a_0$ | $a_1+ca_0$ | $a_2+c(a_1+ca_0)$ | ... | $a_{n-1}+cb_{n-2}$ | $a_n+cb_{n-1}$ |

Бул Горнердин схемасы деп аталат. $q(x)\in K(x)$ болушу схемадан келип чыгат.

$$x=c\Rightarrow f(c)=r\in K.$$

Демек, $f(x)$ көп мүчөсүн $(x-c)$ бөлгөндөгү калдык көп мүчөнүн $x=c$ маанисине барабар болот.

**Мисал.** $f(x)=2x^5-3x^4+x^2+4x-5,\quad q(x)=x+3$.

$f(x)$ көп мүчөсүн $q(x)$ көп мүчөсүнө бөлгөндөгү калдыкты табалы. Горнердин схемасынан пайдалансак:

| | 2 | -3 | 0 | 1 | 4 | -5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -3 | 2 | -9 | 27 | -80 | -244 | -737 |

$$r=f(-3)=-737,\ q(x)=2x^4-9x^3-27x^2-80x+244,$$
$$f(x)=(x+3)(2x^4-9x^3+27x^2-80x+244)-737.$$

***Теорема.*** *(Безунун теоремасы). $f(x)$ көп мүчөсүнүн $x-c$ га калдыксыз бөлүнүшү үчүн $f(c)=0$ болушу зарыл жана жетиштүү:*

$$f(x)=(x-c)q(x)+f(c),\ f(x)\vdots(x-c)\Leftrightarrow f(c)=0.$$

Бул барабардыктан теореманын далилдөөсү келип чыгат.

## 5.3. Көп өзгөрмөлүү көп мүчөлөрдүн алкагы

Айталы $K$ алкагы берилсин. Ал эми $K[x]$ коэффициенти $K$ алкагынан алынган бир өзгөрмөлүү көп мүчөлөрдүн алкагы болсун.

$$K\times K\times...\times K=\{\langle a_0,a_1,a_2,...\rangle / \forall i: a_i\in K\}.$$

$K[x]$ алкагынын жардамында жаңы $(K[x])[y]$ алкакты бир өзгөрмөлүү көп мүчөлөрдүн алкагын түзгөндөй түзүүгө болот.

$$\forall f \in (K[x])[y]: f = a_0 y^0 + a_1 y + a_2 y^2 + ... + a_n y^n.$$

$f$ көп мүчөсүн төмөнкүчө жазалы:

$$f = (a_{00} + a_{01}x + a_{02}x^2 + ... + a_{on}x^n) + (a_{01} + a_{11}x + a_{12}x^2 + ... + a_{1n}x^n)y +$$
$$+ (a_{20} + a_{21}x + a_{22}x^2 + ... + a_{2n}x^n)y^2 + ... + (a_{n0} + a_{n1}x + a_{n2}x^2 + ... + a_{nn}x^n)y^n =$$
$$= \sum_{i,j} a_{ij}x^j y^i, \text{ мында } \forall i,j : a_{ij} \in K.$$

$f$ көп мүчөсүнүн коэффициенттери $K[x,y]$ эки өзгөрмөлүү көп мүчөлөрдүн алкагынан алынат.

Жогорудагыдай эле бул алкактын жардамы менен жаңы алкакты түзүүгө болот жана ушул сыяктуу толук математикалык индукция методунун жардамында каалаган $n$ өзгөрмөлүү көп мүчөлөрдүн алкагына аныктоо берүүгө болот.

$$K[x_1, x_2, ..., x_{n-1}]$$

алкак болсун деген божомол алабыз.

$$(K[x_1, x_2, ..., x_{n-1}])[x_n] = K[x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n], \tag{3}$$

коэффициенттери $K$ алкагынан алынган $n$ өзгөрмөлүү көп мүчөлөрдүн алкагы болсун. Анда $\forall f \in K[x_1, x_2, ..., x_{n-1}]$ көп мүчөсүн:

$$f = \sum_{(i_1,i_2,...,i_n)} a_{(i_1,i_2,...,i_n)} x^{i_1} x^{i_2} ... x^{i_n}$$

көрүнүшүндө жазууга болот, мында $\tau = (i_1, i_2, ..., i_n)$ - $n$ ченемдүү вектор.

$$f = \sum_{\tau} a_\tau x^{i_1} x^{i_2} ... x^{i_n},$$

$$|\tau| \overset{def}{=} i_1 + i_2 + ... + i_n,$$

$$f_1 = a_\tau x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_n^{i_n}. \tag{4}$$

Бул $f$ көп мүчөсүнүн биринчи мүчөсү, мындагы $a_\tau \neq 0$ болсо, анда $|\tau|$ бүтүн саны $f_1$ мүчөсүнүн даражасы деп аталат.

**Мисал.** $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2 x_3 - 2x_1 x_2 x_3 + 3x_1^3 - 4x_1 x_2^2$.

Берилген көп мүчөнүн биринчи мүчөсү, $f_1 = -2x_1 x_2 x_3$ болот, ал эми биринчи мүчөнүн даражасы $|\tau| = 3$.

Эгерде, белгилүү бир шарт аткарылса, анда $f$ көп мүчөсүнүн нормалдык көрүнүшүн төмөндөгүчө жазууга болот:

$$f = \sum_{|\tau|=0} a_\tau x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_n^{i_n}. \tag{5}$$

Нормалдык көрүнүштө $f_1$ даражасы $|\tau| = n$, $a \neq 0$ болсо, анда (5) $n$-даражалуу көп мүчө деп аталат.

Жогорку мисалдагы $f_1$ улуу мүчө деп аталат. Демек, көп өзгөрмөлүү көп мүчөлөрдүн бир эмес бир нече улуу мүчөлөрү болуп калышы мүмкүн.

### 5.4. Көп өзгөрмөлүү көп мүчөлөрдүн лексикографиялык жазылышы

$$\forall f \in K[x_1, x_2, ...., x_{n-1}]: f = \sum_{|\tau|=0} a_\tau x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_n^{i_n}. \qquad (1)$$

Каалаган эки бир мүчөлөрүн алалы:

$$f_1 = a_\tau x^{i_1} x^{i_2} ... x^{i_n},\ f_1 : \tau = (i_1, i_2, ..., i_n),$$

$$f_2 = b_\nu x^{j_1} x^{j_2} ... x_n^{j_n},\ f_2 : \nu = (j_1, j_2, ..., j_n).$$

***Аныктама.*** Эгерде $\tau - \nu = (i_1 - j_1, i_2 - j_2, ..., i_n - j_n)$ векторунун биринчи нөл эмес координатасы оң сан болсо, анда $f_1$ бир мүчөсүн $f_2$ бир мүчөсүнөн жогору деп айтабыз жана аны $f_1 > f_2$ деп белгилейбиз.

**Мисал.** $f(x_1, x_2, x_3) = -4x_1x_2 + 3x_1^3 - 2x_1x_2x_3 + x_1^2x_2x_3$.

$f_1 = -2x_1x_2x_3,\ \ \tau = (1, 1, 1),$

$f_2 = -4x_1x_2,\ \ \nu = (1, 1, 0),$

$\tau - \nu = (0, 0, 1).$

Демек, $f_1 > f_2$.

***Теорема.*** *$f$ көп өзгөрмөлүү көп мүчөсүнүн бир мүчөлөрүнүн көптүгүн карайлы. Бул көптүктө бир мүчөлөрдүн жогору болуу катышы катуу ирет катышы болот.*

Далилдөө. Транзитивдик касиетке ээ болушун көрсөтөбүз.

$$f_1 = a_\tau x^{i_1} x^{i_2} ... x^{i_n},\ \tau(i_1, i_2, ..., i_n),$$

$$f_2 = b_\nu x^{j_1} x^{j_2} ... x_n^{j_n},\ \nu(j_1, j_2, ..., j_n),$$

$$f_3 = c_\eta x^{k_1} x^{k_2} ... x_n^{k_n},\ \eta(k_1, k_2, ..., k_n),$$

бир мүчөлөрүн алалы. $f_1 > f_2 \wedge f_2 > f_3 \Rightarrow f_1 > f_3$ болушун көрсөтөбүз.

$$f_1 > f_2 \Rightarrow \exists t : \tau - \nu = (i_1 - j_1, i_2 - j_2, ..., i_n - j_n),$$

$$i_1 - j_1 = i_2 - j_2 = ... = i_{t-1} - j_{t-1} = 0,\ i_t - j_t > 0,$$

$$f_2 > f_3 \Rightarrow \exists s : \nu - \eta = (0, 0, ..., 0, i_s - j_s, ...., i_n - j_n),\ j_s - k_s > 0,$$

$$f_1 > f_3 \Rightarrow \tau - \eta = (i_1 - \kappa_1, i_2 - \kappa_2, ..., i_n - \kappa_n) =$$

$$= ((i_1 - j_1) + (j_1 - \kappa_1), (i_2 - j_2) + (j_2 - \kappa_2), ..., (i_n - j_n) + (j_n - \kappa_n)) =$$

$$= ((i_1 - j_1), (i_2 - j_2), ..., (i_n - j_n)) + ((j_1 - \kappa_1), (j_2 - \kappa_2), ..., (j_n - \kappa_n)) =$$

$$= (0, 0, ..., (i_t - j_t), ..., (i_n - j_n)) + (0, 0, ..., (j_s - \kappa_s), ..., (j_n - \kappa_n)).$$

1) $t > s$ болсо, анда сумма вектордо $s$ координаталарга чейинкилер нөл, ал эми $s$ - координатадан баштап нөлдөн чоң болот.

2) $t < s$ болсо, анда $t$ - координатага чейинки нөл, $t$ - координатадан баштап нөлдөн чоң болот.

3) $t = s$ болсо, анда $t$ - координатага чейинки нөл, $t$ - координатадан баштап нөлдөн чоң болот.

Ошентип, кайсыл учурда болбосун, $\tau - \eta$ векторунун биринчи нөл эмес координатасы оң сан болот.

$f_1 > f_3$ болсо, б.а. бир мүчөлөрүнүн жогору болуу катышы транзитивдик касиетке ээ. Демек, бир мүчөлөрдүн көптүгүндө жогору болуу катышы катуу ирет катышы болот. Талап кылынган далилденди.

Андай болсо, бул катыштын жардамында көп өзгөрмөлүү көп мүчөнүн бир мүчөлөрүнүн көптүгүн иреттеп чыгууга болот.

***Аныктама.*** *Көп өзгөрмөлүү көп мүчөнүн бир мүчөлөрүнүн көптүгү жогору болуу катышынын жардамында иреттелгенден кийинки жазылышы көп мүчөнүн лексикографиялык жазылышы деп аталат.*

**Мисал:**

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 - 2x_1x_2x_3 + x_1^2x_2x_3 + 3x_2x_3^2 - x_1x_2^2x_3^2,$$

көп мүчөсүнүн лексикографиялык жазылышы төмөнкүдөй болот:

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 + x_1^2x_2x_3 - x_1x_2^2x_3^2 - 2x_1x_2x_3 + 3x_2x_3^2.$$

Катыш катуу ирет катышы болгондуктан эң жогорку мүчө бирөө гана болот. Аны берилген көп мүчөнүн жогорку мүчөсү (жм) деп атайбыз.

Мисалы,

$$f = x_1^3 + x_1^2x_2x_3 - 2x_1x_2x_3,$$

көп мүчөсүнүн жогорку мүчөсү: $жм\ f = x_1^3$ болот.

***Теорема.*** *K - бүтүндүүлүк областы (КО) болсо, анда каалаган көп мүчөлөр үчүн көбөйтүүнүн жогорку мүчөсү жогорку мүчөлөрдүн көбөйтүндүсүнө барабар:*

$$\forall f,g \in K[x_1,\dots,x_n]: \quad жм(fg) = (жм\, f)(жм\, g).$$

Далилдөө. $жм\, f = a_\tau x_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{i_n}$, $\quad жм\, g = b_\nu x_1^{j_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{j_n}$.

$$(жм\, f)(жм\, g) = a_\tau b_\nu x_1^{i_1+j_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{i_n+j_n}, \tag{2}$$

$$\forall t:\ f_t \in f\cdot g,\ f_t = c_\eta x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{k_n}. \tag{3}$$

(2) жана (3) формулаларындагы $i_t + j_t, (i = 1,2,\dots,n)$ жана $k_t, (i = 1,2,\dots,n)$ салыштырабыз.

$$i_1 + j_1 \ge k_1,$$

$$i_2 + j_2 \ge k_2,$$

..................

$$i_n + j_n \ge k_n.$$

Мындан

$$((i_1 + j_1 - k_1),(i_2 + j_2 - k_2),\dots,(i_n + j_n - k_n)), \tag{4}$$

векторунан, биринчи нөл эмес координатасы оң болушун алабыз. Демек, башка учурларда (2) формуласы (3) формуласынан жогору болот.
Эгерде (3) менен (2) дал келсе, анда (4) бардык координаталары 0 болот.
Демек, жогорку ой жүгүртүүнүн негизинде көбөйтүүчүлөрдүн жогорку мүчөсү (2) болот деген жыйынтыкка келебиз. $K$ - бүтүндүүлүк областы болгондуктан $a_\tau b_\nu \neq 0$ болот.

### 5.5. Симметриялык көп мүчөлөрдүн алкагы

$K$ - бүтүндүүлүк областы жана $K[x_1, x_2, ..., x_n]$ алкак, ал эми $S_n$ – группа болсун.

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & ... & \tau(n) \end{pmatrix}.$$

Анда

$$S_n = \{ f / f : A \xrightarrow{\text{ы}} A \wedge |A| = n \} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & ... & \tau(n) \end{pmatrix} \right\},$$

$$\{1,2,3,...,n\} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, ..., \tau_n\},$$

б.а. $n$ элементтүү көптүктү өзүнө-өзүн биективдүү чагылтуулардын көптүгү. Мындан ары бул көптүктү $n$ элементтен түзүлгөн орун алмаштыруулар деп атайбыз. Мисалы, $n = 3$ болгондо:

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix}$$

| × | $e_0$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_0$ | $e_0$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ |
| $e_1$ | $e_0$ | $e_1$ | $e_3$ | $e_2$ | $e_5$ | $e_4$ |
| $e_2$ | $e_2$ | $e_4$ | $e_2$ | $e_5$ | $e_1$ | $e_3$ |
| $e_3$ | $e_3$ | $e_5$ | $e_1$ | $e_3$ | $e_0$ | $e_2$ |
| $e_4$ | $e_4$ | $e_2$ | $e_5$ | $e_0$ | $e_4$ | $e_1$ |
| $e_5$ | $e_5$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_5$ |

Жалпы учурда $S_n$ – группа болот, б.а. $n$ элементтен түзүлгөн орун алмаштыруулардын группасы деп аталат.

Айталы $\forall f(x_1, x_2, ..., x_n) \in K[x_1, x_2, ..., x_n]$.

***Аныктама.*** *Эгерде $f$ көп мүчөсүнө $S_n$ группасынын каалаган элементин колдонгондо $f$ көп мүчөсү өзгөрбөсө, анда аны симметриялык көп мүчө деп атайбыз, б.а.*

$$\forall \tau \in S_n : f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, ..., x_{\tau(n)}).$$

**Мисал.** $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2x_3$ көп мүчөсү симметриялык көп мүчө болобу?

Текшерүү үчүн бул көп мүчөгө $S_3$ группасынын ар бир элементин колдонобуз.

$$e_4 : f(x_3, x_1, x_2) = x_3^2 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_3x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2x_3 = f(x_1, x_2, x_3),$$

$$e_5 : f(x_3,x_2,x_1) = x_3^2 + x_2^2 + x_1^2 - 2x_3x_2x_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2x_3 = f(x_1,x_2,x_3),$$
$$e_3 : f(x_2,x_3,x_1) = x_2^2 + x_3^2 + x_1^2 - 2x_2x_3x_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2x_3 = f(x_1,x_2,x_3),$$
$$e_2 : f(x_2,x_1,x_3) = x_2^2 + x_1^2 + x_3^2 - 2x_2x_1x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2x_3 = f(x_1,x_2,x_3).$$

Демек, көп мүчө симметриялык көп мүчө болот.

Коэффициенттери $K$ алкагынан алынган $n$ өзгөрмөлүү симметриялык көп мүчөлөрдүн көптүгүн $SK[x_1,x_2,...,x_n]$ аркылуу белгилейли.

***Теорема**. К алкак болсо, анда $SK[x_1,x_2,...,x_n]$ да алкак болот.*

Төмөндөгү симметриялык көп мүчөлөрдү негизги симметриялык көп мүчөлөр деп атайбыз:

$\sigma_1 = x_1 + x_2 + ... + x_n,$

$\sigma_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n,$

$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n,$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$\sigma_n = x_1x_2x_3...x_n.$

Эгерде $K[\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n]$ көптүгүн карасак, жогорудагы теореманын негизинде бул көптүктүн каалаган элементи симметриялык көп мүчө болот.

Мисалы, $f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2\sigma_3$, $f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n) \in SK$, б.а. $K[\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n] \subset SK[x_1,x_2,...,x_n]$. Бул камтылуу тескерисинче орун алабы?

Бул суроого төмөнкү теорема жооп берет:

***Теорема** (Симметриялык көп мүчөлөр жөнүндөгү негизги теорема). Каалаган симметриялык көп мүчө негизги көп мүчөлөр аркылуу туюнтулат.*

Далилдөө үчүн төмөнкү леммаларды далилдейбиз.

***1-лемма.** Симметриялык көп мүчөлөрдүн:*

$$\text{жм } f = ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n} = f_1$$

*жогорку мүчөсү $a\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2}\sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3} \cdot ... \cdot \sigma_1^{\alpha_n}$ симметриялык көп мүчөсүнүн жогорку мүчөсүнө б.а. $f_1$ барабар болот.*

Далилдөө.

$\text{жм } \sigma_1 = x_1 \qquad\qquad \text{жм } \sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2} = x_1^{\alpha_1-\alpha_2}$

$\text{жм } \sigma_2 = x_1x_2 \qquad \Rightarrow \qquad \text{жм } \sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3} = x_1^{\alpha_2-\alpha_3}x_2^{\alpha_2-\alpha_3}$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$\text{жм } \sigma_n = x_1x_2 \cdot ... \cdot x_n \qquad\qquad \text{жм } \sigma_n^{\alpha_n} = x_1^{\alpha_n}x_2^{\alpha_n} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}$

$\text{жм}(a\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2}\sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3} \cdot ... \cdot \sigma_1^{\alpha_n}) =$

$= (ax_1^{\alpha_1-\alpha_2})(x_1^{\alpha_2-\alpha_3}x_2^{\alpha_2-\alpha_3})(x_1^{\alpha_3-\alpha_4}x_2^{\alpha_3-\alpha_4}x_3^{\alpha_3-\alpha_4}) \cdot ... \cdot (x_1^{\alpha_n}x_2^{\alpha_n} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}) =$

$= ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n} = f_1.$

**2-лемма.** Эгерде $жм\, f = ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n} = f_1$ болсо, анда $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \ldots \ge \alpha_n$.

Далилдөө. $f$-симметриялык көп мүчө болгондуктан

$bx_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n} = f_2$, $f_2 = жм\, f$, $f_1 > f_2 \Rightarrow \alpha_1 > \alpha_2$.

$f$ - симметриялык көп мүчө болгондуктан $cx_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n} = f_3$

$$f_3 = жм\, f,\ f_1 > f_3 \Rightarrow \alpha_2 \ge \alpha_3,$$

ж.б.у.с. бул процессти улантсак $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \alpha_3 \ge \ldots \ge \alpha_n$ болору келип чыгат.

Айталы, $f$, $g$ - симметриялык көп мүчөлөр болсун: $жм\, f = f_1$, $жм\, g = g_1$.

***Аныктама.*** *Эгерде $f_1 > g_1$ болсо, анда $f > g$ болот.*

***3-лемма.*** *Симметриялык көп мүчөлөрдүн удаалаштыгы чектүү болот.*

Далилдөө. Эгерде $\varphi_1 > \varphi_2 > \ldots > \varphi_n$ болсо, анда $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ - симметриялык көп мүчө кемүүчү удаалаштык деп аталат.

$$жм\, \varphi_1 = ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}$$

2-лемма боюнча $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \alpha_3 \ge \ldots \ge \alpha_n$.

$$\forall i:\ жм\, \varphi_i = bx_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$$

шарт боюнча $\varphi_1 > \varphi_i$ болгондуктан $жм\, \varphi_1 > жм\, \varphi_i$ болот.

Анда жогоркулардан

$$\alpha_1 \ge k_1, \alpha_2 \ge k_2, \ldots, \alpha_n \ge k_n. \tag{1}$$

Бул барабарсыздыктардан төмөнкүнү алабыз:

$$\begin{cases} 0 \le k_1 \le \alpha_1, \\ 0 \le k_2 \le \alpha_2, \\ ------- \\ 0 \le k_n \le \alpha_n. \end{cases}$$

мындан $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ векторлору $(\alpha_1 + 1, \alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_1 + 1)$ маанилерин кабыл алат. Анда $k_i$ векторлорунун саны $(\alpha_1 + 1)^n$ болот. Демек, ар бир симметриялык көп мүчө жалгыз гана жогорку мүчөгө ээ болгондуктан симметриялык көп мүчөлөрдүн кемүүчү удаалаштыгындагы көп мүчөлөрдүн саны чектүү болот. Талап кылынган далилденди.

Эми жогорку леммалардын жардамында негизги теореманы далилдейбиз. Айталы $\forall f \in SK[x_1, x_2, \ldots, x_n]$: $жм\, f = ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}$. 1-лемма боюнча $f_1 = a\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2}\sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3}\cdot\ldots\cdot\sigma_n^{\alpha_n}$,

$$\begin{aligned} &жм\, f_1 = жм\, f, \\ &f - f_1 = f_2, \\ &f_2 \in SK[x_1, x_2, \ldots, x_n], \\ &f > f_2,\ f_2 = в_v x^{j_1}x^{j_2}\ldots x_n^{j_n}. \end{aligned} \tag{2}$$

Анда 1-лемманын жардамында $f_3 = b\sigma_1^{j_1-j_2}\sigma_2^{j_2-j_3}\cdot\ldots\cdot\sigma_n^{j_n}$,

$$\begin{aligned} &жм\, f_3 = жм\, f_2, \\ &f_2 - f_3 = f_4, \\ &f_4 \in SK[x_1, x_2, \ldots, x_n], \\ &f_2 > f_4, \text{ ж.б.у.с.,} \end{aligned} \qquad (3)$$

б.а. $f > f_2 > \ldots > f_{2(k-1)}$ симметриялык көп мүчөлөрдүн кемүүчү удаалаштыгына ээ болобуз. 3-лемманын негизинде бул удаалаштык чектүү болот:

$$f > f_2 > \ldots > f_S.$$

(2-1) жана (3-2) негизинде $f = f_1 + f_2 = f_1 + f_3 + f_4 = \ldots = f_1 + \ldots + f_s =$
$= a\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2}\sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3}\cdot\ldots\cdot\sigma_n^{\alpha_n} + b\sigma_1^{j_1-j_2}\sigma_2^{j_2-j_3}\cdot\ldots\cdot\sigma_n^{j_n} + \ldots + d\sigma_1^{s_1-s_2}\sigma_2^{s_2-s_3}\cdot\ldots\cdot\sigma_n^{s_n}$.

Демек, талап кылынган далилденди.

**Мисал.** Берилген симметриялык көп мүчө негизги көп мүчөлөр аркылуу туюнтулсун.

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3x_2^2 + x_1^3x_3^2 + x_1^2x_2^3 + x_1^2x_3^3 + x_2^3x_3^2 + x_2^2x_3^3$,

$жм\, f = x_1^3x_2^2$,

| $\alpha_1$ $\alpha_2$ $\alpha_3$ | $\sum\sigma_i$ |
|---|---|
| 3 2 0 | $\sigma_1^1\sigma_2^2$ |
| 3 1 1 | $a\sigma_1^2\sigma_3$ |
| 2 2 1 | $b\sigma_2\sigma_3$ |

$$f = \sigma_1\sigma_2^2 + a\sigma_1^2\sigma_3 + b\sigma_2\sigma_3. \qquad (4)$$

Мындагы $a, b$ белгисиз коэффициенттерин табуу үчүн төмөндөгү таблицаны түзөбүз:

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ &\sigma_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3, \\ &\sigma_3 = x_1x_2x_3, \end{aligned}$$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 6 |
| 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 2 |

Анда таблицанын негизинде (4) төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{cases} 27 + 9a + 3b = 6 \\ 1 - a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = -7 \\ -a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a = -8 \\ b = a + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2, \\ b = -1. \end{cases}$$

$f = \sigma_1\sigma_2^2 - 2\sigma_1^2\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3$,

$f = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3)^2x_1x_2x_3 -$
$-(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x_1x_2x_3$.

### 5.6. Алгебранын негизги теоремасы

Айталы, $P$ талаасы берилсин. $P[x]$ коэффициенттери $P$ талаасынан алынган бир өзгөрмөлүү көп мүчөлөрдүн алкагы болсун.

***Аныктама.*** *Эгерде $P[x]$ алкагынан алынган каалаган оң даражалуу көп мүчөнүн $P$ талаасына камтылуучу боло турган жок дегенде бир тамыры жашаса, анда $P$ талаасы алгебралык туюк талаа деп аталат.*

Мисалы, $R[x]$ - алкак болсун. $f = x^2 - 4$, $x_1 = 2, x_2 = -2 \in R$. $g = x^2 + 1$, $x_1 = i, x_2 = -i \notin R$. Демек, $R$ алгебралык туюк талаа болбойт.

***Теорема*** *(Алгебранын негизги теоремасы). $C$ комплекстик сандар талаасы алгебралык туюк талаа болот.*

Алгебранын негизги теоремасын төмөндөгү формада да берүүгө болот: *каалаган комплекстик коэффициенттүү оң даражалуу көп мүчөнүн жок дегенде бир комплекстик тамыры жашайт.*

Алгебранын негизги теоремасын далилдөө үчүн зарыл болгон леммаларга токтолобуз:

Айталы $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z$, бош мүчөсү нөлгө барабар болгон көп мүчө берилсин, мында $f(z) \in C[z]$.

**1-лемма.** $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |z| < \delta \Rightarrow |f(z)| < \varepsilon$.

Далилдөө. $|z| = 1$, $|f(z)| = |a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z| =$

$= |z(a_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + a_2 z^{n-3} + \ldots + a_{n-1})| = |z||a_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + a_2 z^{n-3} + \ldots + a_{n-1}| =$

$= |z|(|a_0||z^{n-1}| + |a_1||z^{n-2}| + |a_2||z^{n-3}| + \ldots + |a_{n-1}|)$,

мындан, төмөнкүдөй белгилөө жүргүзсөк:

$$|a_0| + |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{n-1}| = M, \ \delta = min\left(1, \frac{\varepsilon}{M}\right),$$

анда $|z| < \delta \Rightarrow |f(z)| < |z|M < \delta M = \varepsilon$. Демек, $|z| < \delta \Rightarrow |f(z)| < \varepsilon$.

***2-лемма.*** *(Комплекстик өзгөрмөлүү көп мүчөлөрдүн үзгүлтүксүздүгү жөнүндөгү лемма). Каалаган комплекстик коэффициенттүү көп мүчө үзгүлтүксүз функция болот.*

Далилдөө. $f(z)$ көп мүчөсүнүн $z = z_0$ чекитинде үзгүлтүксүздүгүн көрсөтөбүз. $f(z)$ көп мүчөсүнүн $z - z_0$ даражасы боюнча ажыратабыз (Горнердин схемасы боюнча):

$$f(z) = a_0(z - z_0)^n + a_1(z - z_0)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(z - z_0) + f(z_0),$$

$$f(z) - f(z_0) = a_0(z - z_0)^n + a_1(z - z_0)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(z - z_0),$$

мында $f(z) - f(z_0)$ көп мүчөсүнүн бош мүчөсү нөлгө барабар. Бул көп мүчөгө 1-лемманы колдонсок:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon,$$

б.а. комплекстик коэффициенттүү көп мүчө үзгүлтүксүз болот. Демек, $f(z)$ көп мүчөсү $z = z_0$ чекитинде үзгүлтүксүз.

***3-лемма.*** *(Модулдун өсүшү жөнүндө).*

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 : |z| < \delta \Rightarrow |f(z)| > M.$$

***4-лемма.*** *(Модулдун чектелиши жөнүндө). $f(z)$ оң даражалуу көп мүчө болсун. Анда ал өзүнүн нак төмөнкү чегине ээ болот:*

$$m = \inf_{z \in C} |f(z)|, \ \forall z \in C : \ f(z) \geq m.$$

***5-лемма.*** *(Даламбердин леммасы). $f(z)$ оң даражалуу көп мүчө болсун. $|f(z)| \neq 0$ болсо, анда $z_1$ саны жашап $|f(z_1)| < |f(z_0)|$ барабарсыздыгы орун алат.*

Эми алгебранын негизги теоремасынын далилдөөсүн келтирели.

$$f(z) \in C[z], \ deg\, f > 0, \ m = \inf |f(z)|.$$

4-лемманын негизинде $\exists z_1 \in C : f(z_1) = m$. Эгерде $f(z_1) = m \neq 0$ болсо, анда 5-лемма боюнча $\exists z_2 \in C : 0 < |f(z_2)| < |f(z_1)|$ боло тургандай $z_2$ комплекстик саны жашайт. Мындай $z_2$ комплекстик санынын жашашы $m$ санынын нак төмөнкү чек экендигине каршы келет. Демек, $m \neq 0$ деген туура эмес б.а. $f(z)$ комплекстик коэффициенттүү оң даражалуу көп мүчөнүн $z_1$ комплекстик тамыры жашайт.

### 5.7. Виеттин теоремасы

Айталы $f(z)$ көп мүчөсү берилсин:

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n, \tag{1}$$

мында $f(z) \in C[z]$, $deg\, f = n$, $a_0 \neq 0$.

***Теорема.*** *$n$-даражалуу комплекстик коэффициенттүү көп мүчө $n$ комплекстик тамырга ээ болот.*

Далилдөө. Алгебранын негизги теоремасы боюнча көп мүчөнүн $z_1$ комплексттик тамыры жашасын. Анда

$$f(z) = (z - z_1) f_1(z),$$

$$f_2(z) : \ f_2(z) = 0 \Rightarrow f_2(z) = f_1(z)(z - z_2),$$

$$f_3(z) : \ f_3(z) = 0 \Rightarrow f_3(z) = f_2(z)(z - z_3),$$

..................................................................

$$f_n(z) : \ f_n(z) = 0 \Rightarrow f_n(z) = f_{n-1}(z)(z - z_n),$$

$$f(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n).$$

$a_0 \neq 0$ болсун жана көп мүчөнүн даражасы оң болгондуктан алгебранын негизги теоремасы боюнча анын жок дегенде бир комплекстик тамыры жашайт. Ал тамыр $z_1$ болсун, б.а. $f(z) = (z - z_1) f_1(z)$.

Эгерде көп мүчөнүн даражасы бирге барабар болсо, анда $deg\, f_1(z) = 0$ болуп, далилдөө токтойт. Демек, $n = 1$ болсо, көп мүчө бир комплекстик тамырга ээ. Далилдөөнү толук математикалык индукция методу менен жүргүзөбүз.

Айталы $f(z)$ көп мүчөсү $n$ тамырга ээ болсун деп алалы. Анда алгебранын негизги теоремасы боюнча $f(z)$ көп мүчөсүнүн жок дегенде бир комплекстик тамыры жашайт. $C$ бүтүндүүлүк областы болгондуктан $deg\, f = n$ болот. Анда индуктивдүү божомолдун негизинде $f_1(z)$ көп мүчөсү $n+1$ комплекстик тамырга ээ болот.

Демек, $f_1(z)$ көп мүчөсүнүн $n+1$ комплекстик тамыры бар. $f_1(z)$ тамырлары $f(z)$ көп мүчөсүнүн да тамырлары болот. Ошентип, комплекстик $n$-даражалуу көп мүчөнүн $n$ тамыры бар.

$$deg\, f = n.$$

Анда жогорку теореманын негизинде $f(z)$ көп мүчөсүнүн $n$ комплекстик тамыры бар. Ал тамырлар $z_1, z_2, ..., z_n$ болсун, б.а. $f(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n)$. Мындагы кашааларды ачабыз:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n) = a_0[z^n - z^{n-1}(z_1 + z_2 + ... \_ z_n) - \\ &- (z_1z_2 + z_2z_3 + ... + z_{n-1}z_n)z^{n-2} - ... - (-1)^n z_1z_2...z_n] = \\ &= a_0[z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \sigma_2 z^{n-2} + ... + (-1)^n \sigma_n]. \end{aligned} \qquad (2)$$

(1) жана (2) салыштыруудан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{cases} a_0 = a_0, \\ \sigma_1 = -\dfrac{a_1}{a_0}, \\ \sigma_2 = \dfrac{a_2}{a_0}, \\ ------ \\ \sigma_n = (-1)^n \dfrac{a_n}{a_0}. \end{cases} \qquad (3)$$

Бул Виеттин формуласы. Демек, биз төмөнкү теореманы далилдедик.

***Теорема** (Виеттин теоремасы). Эгерде $n$-даражалуу көп мүчө (2) көрүнүшүндө берилсе, анда ал көп мүчө үчүн (3) орун алат.*

Мисалы, $n = 2$ үчүн $f(z) = a_0z^2 + a_1z + a_2$,

$$\begin{cases} \sigma_1 = z_1 + z_2 = -\dfrac{a_1}{a_0}, \\ \sigma_2 = z_1z_2 = \dfrac{a_2}{a_0}. \end{cases}$$

**Мисал.** $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - x - 15 = 0$,

$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, *жсм* $g = x_1^3$.

| $\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3$ | $\sum\sigma_i$ |
|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 0 | $\sigma_1^3$ |
| 2 | 1 | 0 | $a\sigma_1\sigma_2$ |
| 1 | 1 | 1 | $b\sigma_3$ |

$$g=\sigma_1^3+a\sigma_1\sigma_2+b\sigma_3.$$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | $g$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 |

$$\begin{cases} 8+2a=2, \\ 27+9a+b=3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3, \\ b=3. \end{cases}$$

$$g=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3,$$

$$g=-\frac{8}{125}-3\frac{2}{25}+9=\frac{-8-30}{125}+9=8\frac{87}{125}.$$

Мындан $\sigma_1=-\frac{2}{5}$, $\sigma_2=-\frac{1}{5}$, $\sigma_3=3$.

### 5.8. Келтирилбөөчү көп мүчөлөр

Айталы $K$ алкагы берилсин, $K[x]$ - коэффициенттери $K$ алкагынан алынган бир өзгөрмөлүү көп мүчөлөрдүн алкагы болсун.

***Аныктама.*** *$f(x)\in K[x]$. Эгерде $f(x)$ көп мүчөсүн, даражасы оң болгон эки көп мүчөнүн көбөйтүндүсү түрүндө жазууга мүмкүн болсо, анда $f(x)$ көп мүчөсү $K[x]$ алкагында келтирилүүчү көп мүчө деп аталат, б.а. $f(x)$ көп мүчөсү $K[x]$ алкагына карата келтирилүүчү деп аталат.*

**Мисал.** $f(x)=x^2-1$, $K=Z$, $f(x)=(x-1)(x+1)$, демек, $f(x)$ көп мүчөсү $Z[x]$ карата келтирилүүчү болот.

***Аныктама.*** *Эгерде $f(x)$ көп мүчөсүн даражасы оң болгон $K[x]$ алкагына камтылуучу боло турган көп мүчөлөрдүн көбөйтүндүсү түрүндө жазууга мүмкүн болбосо, анда келтирилбөөчү көп мүчө деп аталат.*

**Мисал.** $f(x)=x^2+1$, $K=R$, $f(x)=(x-i)(x+i)$, демек, $f(x)$ көп мүчөсү $R[x]$ карата келтирилбөөчү болот.

Келтирилбөөчү көп мүчөлөр төмөнкү касиеттерге ээ:

$1^0$. $C[x]$ алкагында сызыктуу көп мүчөлөр гана келтирилбөөчү болот, б.а. $C[x]$ алкагында даражасы бирден чоң болгон каалаган көп мүчө келтирилүүчү болот.

$2^o$. $R[x]$ алкагында сызыктуу көп мүчөлөр жана $g(x)=(x-a)^2+b^2$ көп мүчөсүнө ассоцирленген гана экинчи даражадагы көп мүчөлөр келтирилбөөчү болот. Демек $R[x]$ алкагында даражасы экиден чоң болгон каалагандай көп мүчө келтирилүүчү болот.

***Теорема** (Эйзенштейндин сынамасы).* $Z[x]$ *алкагынан* $f(x)$ *көп мүчөсүн алалы:* $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n$. *Эгерде 1)* $a_0 \vdots p$; *2)* $a_1,a_2,...,a_n \vdots p$; *3)* $a_n \vdots p^2$ *шарттары аткарылса, анда* $f(x)$ *көп мүчөсү* $Z[x]$ *алкагында келтирилбөөчү болот, мында* $p$*-каалагандай сан.*

**Мисал.** $f(x)=x^n+5$, $p=5$. 1) $a_0 \vdots 5$ - аткарылбайт; 2) $a_1,a_n \vdots 5$; 3) $a_n=5 \vdots 25$ - аткарылбайт. Демек, $f(x)=x^n+5$ келтирилбөөчү болот.

$Z[x]$ жана $Q[x]$ алкактарында келтирилүүчү түшүнүгү бирдей эле касиеттерге ээ болот.

***Теорема.*** *Эгерде* $\dfrac{p}{q}$ *бөлчөгү* $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ *көп мүчөсүнүн тамыры болсо, анда* $a_0 \vdots p$, $a_n \vdots q$ *шарттары аткарылат, б.а.*

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=0 \wedge (p,q)=1 \Rightarrow \begin{cases} a_0 \vdots p, \\ a_n \vdots q. \end{cases}$$

Жогорудагы теореманын негизинде $Z[x]$ жана $Q[x]$ алкактары бирдей касиеттерге ээ болот.

Демек, $Z[x]$ жана $Q[x]$ алкактарында жетишээрлик чоң даражадагы келтирилбөөчү көп мүчөлөр бар деген жыйынтыкка келебиз.

## 5.9. Чыныгы коэффициенттүү көп мүчөлөр

$R[x]$ алкагынан $f(x)$ көп мүчөсүн алалы:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n.$$

***Теорема.*** *Эгерде, чыныгы коэффициенттүү* $f(x)$ *көп мүчөсүнө* $\alpha$ *комплекстик саны тамыр болсо, анда анын түйүндөшү дагы* $f(x)$ *көп мүчөсүнө тамыр болот, б.а.* $f(\alpha)=0 \Rightarrow f(\overline{\alpha})=0$.

Далилдөө. $f(\overline{\alpha})=a_0(\overline{\alpha})^n+a_1(\overline{\alpha})^{n-1}+a_2(\overline{\alpha})^{n-2}+...+a_{n-1}\overline{\alpha}+a_n=$

$$=\overline{a_0}\,\overline{\alpha^n}+\overline{a_1}\,\overline{\alpha^{n-1}}+\overline{a_1}\,\overline{\alpha^{n-2}}+...+\overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha}+\overline{a_n}=$$

$$=\overline{a_0\alpha^n}+\overline{a_1\alpha^{n-1}}+\overline{a_2\alpha^{n-2}}+...+\overline{a_n}=\overline{a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+a_2\alpha^{n-2}+...+a_n}=\overline{f(\alpha)}=\overline{0}=0$$

**Натыйжа.** Чыныгы коэффициенттүү так даражалуу көп мүчөнүн жок дегенде бир чыныгы тамыры бар.

# 6-ГЛАВА. СЫЗЫКТУУ АЛГЕБРАНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

## 6.1. Сызыктуу вектордук мейкиндиктин аныктамасы жана мисалдары

***Аныктама.*** *$P$ - талаа, $V \neq \varnothing$ болсун. Бул көптүктө кошуу жана санга көбөйтүү амалы аныкталган болсун, б.а. $\langle V, +, \times\ \alpha \in R \rangle = Q$. Эгерде төмөнкү касиеттер орун алса:*

$1^0.\ \forall \vec{a}, \vec{b} \in V : \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,

$2^0.\ \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V : (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,

$3^0.\ \forall \vec{0} \in V : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$,

$4^0.\ \forall \vec{a} \in V, \exists(-\vec{a}) \in V : \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$,

$5^0.\ \forall \vec{a} \in V : \vec{a} \cdot 1 = \vec{a}$,

$6^0\ \forall \vec{a} \in V, \forall \alpha, \beta \in P : \vec{a}(\alpha\beta) = \alpha(\beta\vec{a})$,

$7^0\ \forall \vec{a} \in V, \forall \alpha, \beta \in P : \vec{a}(\alpha + \beta) = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$,

$8^0.\ \forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \forall \alpha \in P : (\vec{a} + \vec{b})\alpha = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$,

*анда $V$ - сызыктуу ветордук мейкиндик деп аталат.*

Сызыктуу вектордук мейкиндиктин мисалдары катары багытталган кесиндилердин көптүгүн, квадраттык матрицалардын көптүгүн жана башка жогорку сегиз шартты канааттандыруучу көптүктөрдү алууга болот.

### 6.1.1. Векторлордун сызыктуу көз карандылыгы жана рангы

***1-аныктама.*** $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R, (\vec{a}) = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n)$,

$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + ... + \alpha_n \vec{a}_n \in V$

$(\vec{a})$ векторлор системасынын сызыктуу комбинациясы деп аталат.

***2-аныктама.*** *$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + ... + \alpha_n \vec{a}_n$ боло тургандай $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R$ сандары жашаса, анда $\vec{b}$ вектору $(\vec{a})$ векторлор системасы аркылуу сызыктуу туюнтулат деп аталат.*

***3-аныктама.*** *Эгерде $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + ... + \alpha_n \vec{a}_n$ сызыктуу комбинациясында каалагандай $\alpha_i$ коэффициенттери 0 болсо, анда сызыктуу комбинация тривиалдык же 0 сызыктуу комбинация деп аталат.*

***4-аныктама.*** *Эгерде $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + ... + \alpha_n \vec{a}_n$ сызыктуу комбинациясында кандайдыр бир $\alpha_i$ коэффициенти 0 болбосо, анда сызыктуу комбинация тривиалдык эмес сызыктуу комбинация деп аталат.*

***5-аныктама.*** *Эгерде $(\bar{a})$ векторлор системасынын тривиалдык эмес комбинациясы дагы $\bar{0}$ векторун берсе, анда $(\bar{a})$ векторлор системасы сызыктуу көз каранды векторлор системасы деп аталат.*

***6-аныктама.*** *Эгерде $(\bar{a})$ векторлор системасынын тривиалдык комбинациясы гана $\bar{0}$ векторун берсе, анда $(\bar{a})$ векторлор системасы сызыктуу көз каранды эмес векторлор системасы деп аталат.*

***7-аныктама.*** *$V$ - сызыктуу вектордук мейкиндиктин векторлорунан турган максималдык сызыктуу көз каранды эмес векторлор системасын $V$ - сызыктуу вектордук мейкиндиктин базиси деп атайбыз.*

***8-аныктама.*** *Векторлор системасынын базисиндеги векторлордун саны векторлор системасынын рангы деп аталат.*

Мисалы, $rang(a)=r$.

***9-аныктама.*** *$(\bar{a})$ базисиндеги векторлордун саны сызыктуу вектордук мейкиндиктин ченемдүүлүгү деп аталат.*

***1-теорема.*** *$(\bar{a})$ векторлор системасы сызыктуу көз каранды болушу үчүн анын жок дегенде бир векторунун калганы аркылуу сызыктуу туюнтулушу зарыл жана жетиштүү.*

Далилдөө. а) жетиштүүлүк шарты. $(\bar{a})$ векторлор системасынын векторлорунун бирөө, калганы аркылуу сызыктуу туюнтулат:

$$\bar{a}_1 \text{ (СТ) } (\bar{a}) \Rightarrow \bar{a}_7 = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_6\bar{a}_6 + \ldots + \alpha_8\bar{a}_8 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n,$$

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_6\bar{a}_6 + (-1)\bar{a}_7 + \alpha_8\bar{a}_8 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n = \bar{0}.$$

Демек, $(\bar{a})$ векторлор системасынын тривиалдык эмес комбинациясы $\bar{0}$ векторуна барабар болуп калды, $(\bar{a})$ векторлор системасы сызыктуу көз каранды болот.

б) зарыл шарты. $(\bar{a})$ векторлор системасы сызыктуу көз каранды болгондуктан: $\alpha_i\bar{a}_i = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_{i-1}\bar{a}_{i-1} + \alpha_{i+1}\bar{a}_{i+1} + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n$

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_{i-1}\bar{a}_{i-1} + \alpha_i\bar{a}_i + \alpha_{i+1}\bar{a}_{i+1} + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n = 0$$

$$\Rightarrow -\alpha_i\bar{a}_i = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_{i-1}\bar{a}_{i-1} + \alpha_{i+1}\bar{a}_{i+1} + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{a}_i = \frac{\alpha_1}{-\alpha_i}\bar{a}_1 + \frac{\alpha_2}{-\alpha_i}\bar{a}_2 + \ldots + \frac{\alpha_{i-1}}{-\alpha_i}\bar{a}_{i-1} + \frac{\alpha_{i+1}}{-\alpha_i}\bar{a}_{i+1} + \ldots + \frac{\alpha_n}{-\alpha_i}\bar{a}_n.$$

Талап кылынган далилденди.

***2-теорема.*** *Векторлор системасынын рангы төмөнкү элементардык өзгөртүп түзүүлөрдү колдонуудан өзгөрбөйт:*

*а) Векторлор системасындагы каалаган эки вектордун оруңдарын алмаштыруудан;*

*б) Векторлор системасынын каалаган векторун нөлдөн айырмалуу каалаган санга көбөйтүүдөн;*

*в) Эгерде векторлор системасында пропорциялаш эки вектор бар болуп калса, анда алардын бирөөсүн векторлор системасынан чыгарып* *таштоодон;*

*г) Векторлор системасынын каалаган векторун каалаган санга көбөйтүп, анын башка бир векторуна кошуп коюудан.*

### 6.1.2. Векторлордун координаталары

Айталы $V$ сызыктуу вектордук мейкиндиги берилсин. $(\vec{e})=(\vec{e}_1, \vec{e}_2,...,\vec{e}_n)$ - векторлор системасы $V$ мейкиндигинде базис болсун. Анда аныктоо боюнча базис, кандайдыр бир $\vec{x}$ вектору $(\vec{e})$ векторлор системасы аркылуу сызыктуу туюнтулат, б.а.

$$\vec{x}=x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$$

болот.

***Аныктама.*** Векторду берилген базис аркылуу сызыктуу туюнтканда пайда болгон коэффициенттер вектордун берилген базистеги координаталары деп аталат жана $(\vec{x})=(x_1,x_2,...,x_n)$ түрүндө белгиленет.

***Теорема.*** *Каалаган вектор берилген базисте бир гана түрдү координатага ээ болот.*

Далилдөө. Каршысынан далилдейбиз. $(\vec{x})=(x_1,x_2,...,x_n)$, $(\vec{x})=(x'_1,x'_2,...,x'_n)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{x}=x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n, \\ \vec{x}=x'_1\vec{e}_1 + x'_2\vec{e}_2 + ... + x'_n\vec{e}_n. \end{cases}$$

$$0=(x_1-x'_1)\vec{e}_1 + (x_2-x'_2)\vec{e}_2 + ... + (x_n-x'_n)\vec{e}_n \Rightarrow x_1=x'_1,\ x_2=x'_2,\ ...,x_n=x'_n.$$

Демек, бир түрдүү гана координатага ээ болот.

## 6.2. Матрица жана алардын үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдар

Айталы $P$ талаасы берилсин.

***Аныктама.*** $P$ 'талаасынын элементтеринен $m$ жолчо жана $n$ мамыча болуп түзүлгөн таблица, матрица деп аталат. Аны төмөндөгүчө белгилейбиз:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ - & - & ... & - \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

же $P_{mn}=\{A/A=\{a_{ij}\}_{mn} \wedge \forall i,j : a_{ij}\in P_{талаа}\}$.

Матрицанын үстүнөн төмөнкү амалдарды аткарууга болот:

**1. Кошуу.** Тартиптери бирдей болгон матрицаларды кошууга болот.

$\forall (a_{ij})_{mn},(b_{ij})_{mn} \in P_{mn} : (a_{ij})_{mn}+(b_{ij})_{mn}=(a_{ij}+b_{ij})_{mn}\in P_{mn}$.

**2. Санга көбөйтүү.**

$\forall \alpha\in P, \forall (a_{ij})_{mn}\in P_{mn} : \alpha(a_{ij})_{mn}=(\alpha a_{ij})_{mn}\in P_{mn}$.

Демек, $\langle P_{mn},+,\cdot\alpha\rangle = Q$ алгебра болот. Бул алгебрада берилген амалдар төмөнкү касиеттерге ээ:

$1^0.\ (a_{ij})_{mn} + (b_{ij})_{mn} = (b_{ij})_{mn} + (a_{ij})_{mn}$;

$2^0.\ (a_{ij})_{mn} + [(b_{ij})_{mn} + (c_{ij})_{mn}] = [(a_{ij})_{mn} + (b_{ij})_{mn}] + (c_{ij})_{mn}$,

$3^0.\ \exists 0 \in P_{mn}, \forall (a_{ij})_{mn} \in P_{mn} : (a_{ij})_{mn} + 0 = (a_{ij})_{mn}$

$4^0.\ \forall (a_{ij})_{mn}, \exists (-a_{ij})_{mn} \in P_{mn} : (a_{ij})_{mn} + (-a_{ij})_{mn} = 0$.

***Теорема.*** *$\langle P_{mn},+\rangle$ - группа болот.*

$5^0.\ 1\cdot(a_{ij})_{mn} = (a_{ij})_{mn}$,

$6^0.\ \forall \alpha,\beta \in P : (\alpha+\beta)\cdot(a_{ij})_{mn} = \alpha(a_{ij})_{mn} + \beta(a_{ij})_{mn}$,

$7^0.\ \forall \alpha,\beta \in P : (\alpha\cdot\beta)\cdot(a_{ij})_{mn} = \alpha(\beta a_{ij})_{mn}$,

$8^0.\ \forall \alpha \in P : \alpha\cdot[(a_{ij})_{mn} + (b_{ij})_{mn}] = \alpha(a_{ij})_{mn} + \alpha(b_{ij})_{mn}$.

Ошентип, төмөндөгү теореманын далилдөөсүн алдык:

***Теорема.*** *$\langle P_{mn},+,\cdot\alpha\rangle$ - сызыктуу вектордук мейкиндик болот.*

Эгерде $m = n$ болсо, анда матрица квадраттык деп аталат:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & \dots & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

### 3. Матрицаларды көбөйтүү

Төмөнкүдөй матрицаларды алалы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & \dots & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ - & - & \dots & - \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}.\ AB = C,\ C = (c_{ij})_{mk},$$

мында $\forall i, j : c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

***Эскертүү.*** *Эки матрицаны көбөйтүү үчүн көбөйүүчү матрицанын мамычаларынын саны менен көбөйтүүчү матрицанын жолчолорунун саны барабар болушу керек.*

Матрицаларды көбөйтүү коммутативдик касиетке ээ болбойт, бирок каалаган тартиптеги матрицаларды көбөйтүү ассоциативдик касиетке ээ.

Матрицанын рангы. Берилген матрицанын:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & \dots & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ A\in P_{mn},$$

ар бир жолчосун бир вектордун координатасы катары карайлы:

$$\left.\begin{matrix} \bar{a}_1=(a_{11},a_{12},\dots,a_{1n}) \\ \bar{a}_2=(a_{21},a_{22},\dots,a_{2n}) \\ ---------- \\ \bar{a}_m=(a_{m1},a_{m2},\dots,a_{mn}) \end{matrix}\right\}=(\bar{a})$$

***Аныктама.*** *$(\bar{a})$ векторлор системасынын рангы $A$ матрицасынын рангы деп аталат.*

**Эскертүү.** Ушул эле аныктоону мамыча векторлордун жардамы менен да берүүгө болот.

Векторлор системасына элементардык өзгөртүп түзүүлөрдү колдонгон сыяктуу эле матрицага да элементардык өзгөртүп түзүүлөрдү колдонсо болот жана мартицанын рангы өзгөрбөйт.

Элементардык өзгөртүп түзүүлөр:

I. Матрицанын каалаган эки жолчосунун орундарын алмаштырууга болот.

II. Матрицалардын каалаган жолчосун нөлдөн айырмалуу каалаган санга көбөйтүүгө (бөлүүгө) болот.

III. Матрицаларда пропорциялаш жолчолордун бирин гана калтырууга болот.

IV. Матрицанын каалаган жолчосуна анын башка жолчосун көбөйтүп, кошууга болот.

**Мисал.**

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} №1 \\ №2 \\ №3 \\ №4 \end{matrix} \xRightarrow{№2\to№1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} №2-3№1 \\ №2 \\ №3+2№1 \\ №4-2№1 \end{matrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}№4-№2 \Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$rang\, A=3$.

Демек, матрицанын рангы ага элементардык өзгөртүп түзүүлөрдү колдонуу жолу менен аны трапециялык көрүнүшкө келтиргендеги жолчолордун санына барабар.

# 7-ГЛАВА. СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ

## 7.1. Сызыктуу теңдемелер системасы жөнүндө түшүнүк

Эки жана үч белгисиздүү теңдемелер системасы бизге мектеп курсунан белгилүү.

$n$ белгисиздүү $n$ сызыктуу алгебралык теңдемелер системасын жазалы:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = в_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = в_n, \end{aligned} \tag{1}$$

мында $x_i$ - белгисиздер, $a_{ij}$ - коэффициенттер, $в_i$ - бош мүчөлөр, $i, j = 1,2,\ldots,n$. Бул системанын коэффициенттеринин жыйындысын таблица көрүнүшүндө жазалы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$n$ жолчодон жана $n$ мамычадан турган $n^2$ элементтен түзүлгөн бул таблица *$n$- тартиптеги квадраттык матрица* деп аталат.

Матрица түшүнүгүн колдонуп, (1) теңдемелер системасын матрицалык көрүнүштө жазууга болот:

$$AX = B, \tag{2}$$

мында

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \\ \ldots \\ в_n \end{pmatrix}$$

тиешелеш түрдө белгисиздердин жана бош мүчөлөрдүн мамыча матрицалары.

Айрым учурларда атайын көрүнүштөгү матрицаларга ээ болгон теңдемелер системасы алынат. Мындай матрицалардын кээ бир мисалдарын карайлы:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 3 & 2 \\ -5 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$K=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мында, С – *симметриялуу матрица* (анын элементтери негизги диагоналга салыштырмалуу симметриялуу жайгашкан($a_{ij}=a_{ji}$));

$S$ - диагоналдын төмөн жагында жайгашкан элементтери нөлгө барабар болгон *жогорку үч бурчтук матрица*;

$K$ - *чакмактык матрица* (анын нөлдөн айырмалуу элементтери өзүнчө группаны (чакмакты) түзөт, мында чакмак катары төмөнкү матрицаларды эсептейбиз

$$P=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad Q=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$F$ - *үч диагоналдуу матрица*;

$E$ - *бирдик матрица* (диагоналдык матрицанын жекече учуру);

$O$ - *нөлдүк матрица*.

***Аныктама.*** *Эгерде $\bar{x}_0=(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ векторунун координаталарын (1) системанын ар бир теңдемесиндеги тиешелүү белгисиздердин ордуна койгондо ар бир теңдеме теңдештикке айланса, анда $\bar{x}_0$ вектору (1) системанын чечими деп аталат.*

***Аныктама.*** *Эгерде теңдемелер системасынын жок дегенде бир чечими жашаса, анда мындай система биргелешкен деп аталат. Эгерде теңдемелер системасынын бир да чечими жашабаса, анда мындай система биргелешпеген деп аталат.*

***Аныктама.*** *Биргелешкен теңдемелер системасы жалгыз гана чечимге ээ болсо, анда анык система деп аталат, бирден көп чечимге ээ болсо, аныкталбаган система деп аталат.*

***Аныктама.*** *Эгерде сызыктуу теңдемелер системасынын чечиминин көптүктөрү дал келсе, анда аларды тең күчтүү сызыктуу теңдемелер системасы деп атайбыз.*

***Аныктама.*** *$n$-тартиптеги $A$ матрицасынын аныктагычы (же детерминанты) деп,*

$$D=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^k a_{1\alpha}a_{2\beta}\dots a_{n\omega}. \qquad (3)$$

*санын айтабыз.* Мында $\alpha,\beta,...,\omega$ индекстери $1,2,...,n$ номерлеринин бардык мүмкүн болгон $n!$ орун алмаштыруусунан алынып түзүлөт, ал эми $k$- берилген орун алмаштыруудагы орун алмаштыруулардын саны.

$D\neq 0$ шарты, сызыктуу теңдемелер системасынын жалгыз чечиминин жашашынын зарыл жана жетиштүү шарты болот. Системанын аныктагычы нөлгө барабар болгон учурда матрица кубулган деп аталат. Бул учурда (1) сызыктуу теңдемелер системасы же чечимге ээ эмес же чексиз көп чечимге ээ.

Бул учурлардын баарын төмөнкү система үчүн геометриялык түшүндүрмө берүүгө болот:

$$\begin{aligned} a_1x+в_1y=c_1, \\ a_2x+в_2y=c_2. \end{aligned} \qquad (4)$$

Мындагы ар бир теңдеме тегиздикте түз сызыкты берет. Түз сызыктардын кесилишкен чекитинин координатасы (4) системанын чечими болот.

Тегиздикте эки түз сызыктын өз ара жайгашышынын мүмкүн болгон үч учурун карайлы:

1) түз сызыктар кесилишет, б.а. (4) системанын коэффициенттери пропорционалдуу эмес:

$$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{в_1}{в_2}.$$

Бул учурда аныктагыч

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & в_1 \\ a_2 & в_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

болуп, система жалгыз гана чечимге ээ болот.

2) түз сызыктар параллел болот б.а (4) системанын коэффициенттери төмөнкү шартка баш ийет:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{в_1}{в_2}\neq\frac{c_1}{c_2}.$$

Бул учурда $D=0$ болуп, система чечимге ээ болбойт.

3) түз сызыктар дал келет, б.а. (4) системанын бардык коэффициенттери пропорционалдуу:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{в_1}{в_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

$D=0$ болуп, система чексиз көп чечимге ээ.

Келтирилген түшүнүктөр (1) сызыктуу теңдемелер системасында $n=3$ болгон учурда дагы туура болот. Мында ар бир теңдеме мейкиндикте тегиздикти берет. Эгерде үч тегиздик тең параллел болсо же үч тегиздик бир түз сызыкта кесилишпесе же эки тегиздик параллел болуп, ал эми үчүнчүсү аларды кесип өтсө, анда бул учурларда начар шартталган үч белгисиздүү үч сызыктуу теңдемелер системасын алабыз. $n>3$ болгон учурда геометриялык жактан түшүндүрүүгө болбойт.

### 7.2. Жалпы көрүнүштөгү системаны чыгаруу эрежеси.

Айталы, жалпы көрүнүштөгү сызыктуу теңдемелер системасы берилсин:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = в_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = в_m, \end{aligned} \tag{5}$$

мында $m \le n$ болсун, б.а. белгисиздердин саны теңдемелердин санынан кичине болбосун. Системанын белгисиздеринин коэффициенттеринен түзүлгөн *негизги* матрицаны жазалы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Бул матрица $m$ жолчодо жана $n$ мамычада жайгашкан $mn$ элементтен турган *тик бурчтуу матрица* деп аталат. Тик бурчтуу матрицага бош мүчөлөр мамычасын толуктап, $m$ жолчолуу жана $n+1$ мамычалуу, $m(n+1)$ элементтен турган жаңы матрицаны карайлы:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & в_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & в_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{mn} & в_m \end{array}\right)$$

Бул матрица *кеңейтилген матрица* деп аталып, теңдемелер системасын чечүүдө негизги ролду ойнойт.

***Теорема*** *(Кронекер-Капелли) Теңдемелер системасы биргелешкен болушу үчүн негизги матрица менен кеңейтилген матрицанын рангдарынын барабар болушу зарыл жана жетиштүү.*

Сызыктуу теңдемелер системасынын *рангы* деп, анын матрицасынын рангын айтабыз.

Сызыктуу теңдемелер системасын чыгаруунун жалпы эрежесин көрсөтөлү.

1. Системанын биргелешкен экендигин аныктоо керек, б. а. системанын $A$ матрицасынын жана $B$ кеңейтилген матрицаларынын рангдарын аныктайбыз. Кронекер-Капеллинин теоремасы боюнча, эгерде ал матрицалардын рангдары барабар болсо, анда система биргелешкен болот, эгерде дал келбесе, анда система биргелешпеген болот жана мындай системаны чыгаруу мааниге ээ эмес.

2. Айталы, система биргелешкен болсун жана ал системанын рангы: $rang(A)=r$ болсун, анын үстүнө $r \le n$, б. а. матрицанын рангы белгисиздердин санынан ашып кетпейт. Ошондуктан, эки учурдун болушу мүмкүн: же $r=n$, же $r<n$. Биринчи учурда, эгерде системанын рангы белгисиздердин санына барабар болсо, анда система жалгыз гана чечимге ээ болот, б. а. ал анык система болот. Экинчи учурда, качан биргелешкен системанын рангы белгисиздердин санынан кичине болгондо, бул система аныкталбаган болот: ал чексиз көп чечимге ээ.

### 7.3. Сызыктуу системаларды чыгаруу методдору жөнүндө.

Сызыктуу теңдемелер системасын чыгаруу методдору түз жана итерация болуп эки группага бөлүнөт.

Түз методдордо белгисиздерди эсептөө үчүн чектүү катнаштар (формулалар) колдонулат жана чечим мурдатан белгилүү болгон амалдардын саны аткарылгандан кийин гана алынат. Бул методдор салыштырмалуу жөнөкөй жана универсалдуу, б.а. кеңири класстагы сызыктуу системаларды чыгарууга жарамдуу методдор.

Аны менен бирге, түз методдор бир катар кемчиликтерге ээ. Компьютерде эсептегенде бул методдор матрицанын бардык элементтерин компьютердин эсине сактоону талап кылгандыктан, $n$ дин чоң манилеринде эстен көп орун ээленет. Ошондой эле, түз методдор көп сандагы нөлдүк элементтери бар матрицаларда (мисалы, чакмактык же үч диагоналдык), дайыма эле матрицанын структурасын эсепке албайт. Нөлдүк элементтер дагы компьютердин эсинен орун ээлейт жана алардын үстүнөн арифметикалык амалдар жүргүзүлөт. Түз методдордун манилүү кемчилиги болуп, эсептөөнүн каалагандай баскычында, алдыңкы баскычта аткарылган амалдардын жыйынтыгы колдонулуп, мындагы ар бир баскычта пайда болгон каталыктар чыгаруу процессинде олуттуу каталыктарга алып келет. Бул өзгөчө чоң системалар үчүн, качан жалпы амалдардын саны тез өскөндө, ошондой эле, начар шартталган системалар үчүн коркунучтуу. Ошондуктан, түз методдор ар дайым тыгыз толтурулган матрицасы менен жана аныктагычы нөлгө жакын эмес болгон өтө чоң эмес системалар үчүн колдонулат.

Кээде сызыктуу системаларды чыгаруунун түз методдорун так методдор деп да аташат, анткени чечим системанын коэффициенттери аркылуу так формула көрүнүшүндө туюнтулат. Бирок, системанын коэффициенттеринин так маанилеринде, эсептөө так аткарылганда гана так чечим алынышы мүмкүн. Практикада компьютерди колдонгондо эсептөө каталыгы менен жүргүзүлөт. Ошондуктан, акыркы жыйынтыкта дагы каталык сөзсүз болот.

Түз методдордун тобуна кирген төмөнкү методдор жөнүндө кыскача маалымат берели:

- Гаусстун методу. Түз методдордун арасынан, Гаусстун методу эң эле көп тараганы. Гаусстун методу компьютерде эсептөө үчүн өтө ыңгайлуу. Бул методду кийинки пункттарда кеңири карайбыз.
- Жордандын схемасы. Жордандын схемасы башкы элементти тандоо учурунда, башкы элемент тандалып калган теңдемелердин коэффициенттерин эсепке албайт. Аны, Гаусстун методу менен салыштырганыбызда, өтө эле артыкчылыкка ээ эмес. Мында, тескери жүрүш жеңилдетилгенин белгилеп кетсек болот, себеби, система диагоналдык (үч бурчтук эмес) көрүнүшкө келтирилет. Бул схема тескери матрицаны табууда көп пайдаланылат.
- Квадраттык тамыр методу. Бул методду, качан системанын матрицасы симметриялуу болгон учурларда пайдалансак болот.
- Оптималдуу жоюу методу. Бул метод, оперативдик эске системанын матрицасын ар бир жолчосу боюнча киийрүүдө ыңгайлуу. Бирок, жолчосу боюнча кийирүү кемчиликтерге ээ, мисалы, сырткы түзүлүштөргө тез-тез кайрылуу, башкы элементти тандоо мүмкүн эместиги ж. б.
- Чакмактык метод. Бул методду, качан матрица бүт бойдон оперативдик эске батпаган учурда, чоң системаларды чыгаруу үчүн пайдалансак болот.

Итерация методдору - бул улаалаш жакындатуу методдору. Удаалаш жакындатуу методунда кээ бир жакындатылган чыгарылышты тандоо керек, б.а. баштапкы жакындатууну. Андан кийин, айрым бир алгоритмдин жардамында итерация деп аталган эсептөөнүн биринчи циклы аткарылат. Жыйынтыгында кийинки жакындатылган чыгарылышты алабыз. Итерация, талап кылынган тактыкта жакындатылган чечимди алганга чейин жүргүзүлөт. Итерация методдорун колдонуп сызыктуу системаларды чечүү алгоритмдери түз методдорго салыштырганда дайыма татаал болот. Себеби, алдын-ала эсептөө көлөмүн, б.а. аткарыла турган амалдардын санын аныктоо кыйын.

Бирок, айрым учурларда итерация методдору жогору бааланат. Ал методдор компьютердин эсине системанын матрицасынын бардык элементтерин эмес, $n$ компоненттүү бир нече векторлорду гана сактоону талап кылат. Кээде матрицанын элементтерин сактабастан эле, аларды керек болгондо эсептөөгө болот. Андыктан, итерация методдорун пайдаланганда, ар бир итерациянын эсептөө тактыгы, алдынкы итерациянын жыйынтыгы менен аныкталып, мурда аткарылган эсептөөлөрдөн көз каранды болбогондуктан, акыркы жыйынтыкта каталык топтолбойт. Итерация методдорунун мындай жакшы жактары, начар шартталган системаларда, ошондой эле теңдемелердин саны көп болгон учурда өзгөчө пайдалуу. Түз методдордун жардамында алынган чечимди тактоо үчүн дагы итерация методдору колдонулат. Мындай аралаш алгоритмдер өзгөчө начар шартталган системалар үчүн ар качан эффективдүү. Итерация методдору Сандык усулдар курсунда кеңири каралат.

## 7.4. Сызыктуу алгебранын башка маселелери.

Сызыктуу алгебранын сызыктуу теңдемелер системасын чечүүдөн башка дагы көптөгөн маселери бар. Мисалы, аныктагычты эсептөө, тескери матрицаны табуу, матрицанын өздүк маанилерин жана өздүк векторлорун табуу ж. б.

Кээ бир атайын типтеги аныктагычтарды жана тартиби жогору болбогон аныктагычтарды жеңил эле эсептөөгө болот. Мисалы, экинчи жана үчүнчү тартиптеги аныктагычтар тиешелүү түрдө

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11},$$

формулалары менен эсептелиниши бизге мектеп курсунан белгилүү.

Үч бурчтук матрицанын аныктагычы, анын негизги диагоналында жайгашкан элементтеринин көбөйтүндүсүнө барабар: $D = a_{11}a_{22},...,a_{nn}$. Мындан, бирдик матрицанын аныктагычы бирге, ал эми нөлдүк матрицанын аныктагычы нөлгө барабар болушун алабыз. б.а. $\det E = 1$, $\det O = 0$.

Жалпы учурда $n$-тартиптеги $D$ аныктагычы (3) көрүнүшүнө ээ:

$$D = \sum (-1)^k a_{1\alpha} a_{2\beta},...,a_{n\omega}.$$

Бул туюнтмадан аныктагычтын мааниси, ар бир кошулуучусу $n$ элементүү көбөйтүүчүлөрдөн турган $n!$ кошулуучулардын суммасына барабар болушу келип чыгат. Ошондуктан, атайын ыкмаларды колдонбостон $n$-тартиптеги аныктагычты эсептөө үчүн $(n-1)n!$ көбөйтүү жана $n!-1$ кошуу амалдарынын аткарылышы талап кылынат, б.а. арифметикалык амалдардын жалпы саны төмөнкүгө барабар болот:

$$N = (n-1)n! + n! - 1 = nn! - 1 \approx nn!.$$

***Аныктама.*** *$A^{-1}$ матрицасы $A$ квадраттык матрицасына карата тескери деп аталат, эгерде алардын көбөйтүндүсү бирдик матрицага барабар болсо: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.*

Тескери $A^{-1}$ матрицасынын жалгыз жашашы үчүн $A$ матрицасынын кубулбаган болушунун (б.а. нөлдөн айрымалуу $D$ аныктагычы менен) зарыл жана жетиштүү шартын далилдөөгө болот.
Бул учурда

$$\det A^{-1} = 1/D.$$

Баштапкы $A$ матрицасын төмөнкү көрүнүштө жазалы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

***Аныктама.*** *$a_{ij}$ элементинин минору деп, $A$ матрицасынан $i$ – жолчону жана $j$ – мамычаны сызып салгандан кийинки алынган $(n-1)$ – тартиптеги аныктагычты айтабыз.*

*Ал эми $a_{ij}$ элементинин $A_{ij}$ алгебралык толуктоочусу деп, эгерде $i$ – жолчосунун жана $j$ – мамычасынын $i+j$ суммасы жуп болсо, анда кошуу белгиси менен, эгерде бул сумма так болсо, анда кемитүү белгиси менен алынган анын минорун айтабыз, б.а.*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} \dots & a_{1,j-1} \; a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} \dots & a_{i-1,j-1} \; a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} \dots & a_{i+1,j+1} \; a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \dots & a_{n,j-1} \; a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тескери $Z = A^{-1}$ матрицасынын ар бир $z_{ij}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ элементтери $a_{ji}$ ($a_{ij}$ эмес) элементинин $A_{ji}$ алгебралык толуктоочусун, баштапкы матрицанын $D$ аныктагычынын маанисине бөлгөнгө барабар:

$$Z = A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{vmatrix}$$

Мында дагы, жогорудагыдай эле атайын методдорду колдонбостон, тескери матрицаны эсептөө үчүн зарыл болгон амалдардын санын аныктого болот. Бул сан, ар бири $(n-1)$ – тартиптеги аныктагыч болгон $n^2$ алгебралык толуктоочтор жана алгебралык толуктоочтордун $D$ аныктагычына болгон $n^2$ бөлүү эсептелинип, ал амалдардын санынын суммасына барабар. Демек, тескери матрицаны эсептөө үчүн аткарылуучу амалдардын жалпы саны төмөнкүгө барабар болот:

$$N = [(n-1)(n-1)!-1]n^2 + n^2 + nn!-1 = n(n-1)n!-n^2 + n^2 + nn!-1 =$$
$$= n^2n!-nn!+nn!-1 = n^2n!-1.$$

### 7.5. Түз методдор.

#### 7.5.1. Крамердин эрежеси.

Сызыктуу теңдемелер системасын чыгаруу ыкмаларынын бири болуп, Крамердин эрежеси эсептелет, мында ар бир белгисиз аныктагычтардын катышы көрүнүшүндө көрсөтүлөт. Крамердин эрежесин, (1) сызыктуу теңдемелер системасында $n=3$ болгон учурда карайлы:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = в_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = в_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = в_3.$$

Анда

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}, \qquad x_3 = \frac{D_3}{D},$$

мында

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} в_1 & a_{12} & a_{13} \\ в_2 & a_{22} & a_{23} \\ в_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & в_1 & a_{13} \\ a_{21} & в_2 & a_{23} \\ a_{31} & в_3 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & в_1 \\ a_{21} & a_{22} & в_2 \\ a_{31} & a_{32} & в_3 \end{pmatrix}.$$

Бул эрежени каалагандай тартиптеги сызыктуу теңдемелер системасын чечүү үчүн колдонууга аракет кылсак болот. Бирок, системадагы теңдемелердин саны көп болгон учурда, өтө көп сандагы арифметикалык амалдарды аткарууга туура келет, себеби, $n$ белгисизди эсептөө үчүн $n+1$ сандагы аныктагычтардын маанилерин табуу зарыл. Бул учурда арифметикалык амалдардын саны төмөнкүгө барабар:

$$N = (n+1)(nn!-1) + n.$$

Ошондуктан, Крамердин эрежесин аз гана сандагы теңдемелерден турган системаларды чечүү үчүн колдонууга болот.

Тескери матрицаларды колдонуп сызыктуу теңдемелер системаларын чыгарууга болот. Бул учурда (1) системасы матрицалык формада $AX = B$ көрүнүшүндө жазылат. Анда, матрицалык көрүнүштөгү теңдеменин эки жагына тең сол жактан, тескери $A^{-1}$ матрицасына көбөйтсөк, (1) теңдемелер системасынын чечимин матрицалык формада алабыз: $X = A^{-1}B$. Берилген $A$ матрицасы боюнча тескери матрицаны эсептөө, өтө татаал формулалар боюнча жүргүзүлөт. Демек, тескери матрицаны эсептөөдө экономдуу методдорду колдонбосок, $n$ дин мааниси чоң болгон учурда, эсептөө көлөмүнүн көптүгүнөн практикада сызыктуу системаларды чыгаруу үчүн, бул ыкма дагы жарабай калат.

Түз методдордун ичинен өтө кеңири тараганы Гаусстун жоюу методу жана анын модификациясы эсептелет. Төмөндө жоюу методунун колдонулушу сызыктуу теңдемелер системасын чечүүдө, анан дагы аныктагычтарды эсептөө үчүн жана тескери матрицаны табууда каралган.

### 7.5.2. Гаусстун методу.

Гаусстун методу системанын матрицасын үч бурчтук көрүнүшкө алып келүүгө негизделген. Ага теңдемелер системасындагы белгисиздерди удаалаш жоюу аркылуу жетишебиз. Адегенде, биринчи теңдеменин жардамында системанын кийинки бардык теңдемелеринен $x_1$ жоюлат. Андан кийин, экинчи теңдеменин жардамында үчүнчү жана кийинки бардык теңдемелерден $x_2$ жоюлат. Гаусстун методунун түз жүрүшү деп аталган бул процесс акыркы $n$ – теңдеменин сол жагында жалгыз гана мүчө, $x_n$ белгисизи менен калгычаңды улантылат, б.а. системанын матрицасы үч бурчтук көрүнүшкө келтирилет.

Гаусстун методунун тескери жүрүшү, изделүүчү белгисиздерди удаалаш эсептөөдөн турат: системадагы акыркы теңдемени чечип, бул теңдемедеги жалгыз гана $x_n$ белгисизин табабыз. Андан кийин, бул маанини колдонуп, алдыңкы теңдемеден $x_{n-1}$ белгисизин табабыз ж.б.у.с. Акырында, биринчи теңдемеден $x_1$ белгисизи табылат.

Эскерте кетсек, баяндалган процесстер кубулбаган матрицалуу системалар үчүн гана колдонулат. Тескери учурда (эсептөө так жүргүзүлгөн шартта) Гаусстун методунун жардамы менен система чексиз көп чечимге ээби же бир дагы чечимге ээ эмеспи деген суроого жооп берүүгө болот. Айталы системанын матрицасы кубулбаган болсун дейли.

Гаусстун методунун колдонулушун (1) системасында $n = 3$ болгон учурда карайлы:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= в_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= в_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Экинчи тедемеден $x_1$, белгисизин жоюу үчүн, биринчини $-a_{31}/a_{11}$ ге көбөйтүп, экинчиге кошобуз. Андан кийин, биринчи теңдемени $-a_{31}/a_{11}$ ге көбөйтүп жана жыйынтыгын үчүнчү теңдемеге кошуп, мындагы $x_1$ белгисизин дагы жоёбуз. (6) системасына тең күчтүү болгон, төмөнкү көрүнүштөгү теңдемелер системасын алабыз:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= в_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= в'_2, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 &= в'_3, \end{aligned}$$

мында

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}, \; i, j = 2,3,$$

$$в'_i = в_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}в_1, \; i = 2,3.$$

Эми бул системанын үчүнчү теңдемесинен $x_2$ белгисизин жоюу керек. Ал үчүн, экинчи теңдемени $-a'_{32}/a'_{22}$ ге көбөйтүп жана жыйынтыгын үчүнчүгө кошобуз. Анда төмөнкүнү алабыз:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= в_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= в'_2, \\ a''_{33}x_3 &= в''_3, \end{aligned} \qquad (7)$$

мында

$$a''_{33} = a'_{33} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} a'_{23},$$

$$в''_3 = в'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} в'_2.$$

Көрүнүп турат, (7) системасынын матрицасы үч бурчтук көрүнүшкө ээ. Муну менен Гаусстун методунун түз жүрүшү бүтөт.

Белгисиздерди жоюу процессинде $a_{11}, a'_{22}$ жана башка коэффициенттерге бөлөбүз, андыктан ал коэффициенттер нөлдөн айырмалуу болуш керек. Эгерде бул шарт орун албаса, анда системадагы тиешелүү теңдемелердин ордун алмаштыруу керек. Теңдемелердин ордун алмаштырууну, эсептөө алгоритмдерин компьютерде ишке ашырууда алдын ала караштыруу керек.

Ал эми тескери жүрүш, (7) системасындагы үчүнчү теңдемени чечүү менен башталат:

$$x_3 = в''_3 / a''_{33}.$$

Бул маанини колдонуп экинчи теңдемеден $x_2$ белгисизин табууга болот:

$$x_2 = \frac{1}{a'_{22}}\left(в'_2 - a'_{23}\frac{в''_3}{a''_{33}}\right).$$

Андан кийин биринчи теңдемеден $x_1$ табылат:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(в_1 - \frac{a_{12}}{a'_{22}}\left(в'_2 - a'_{23}\frac{в''_3}{a''_{33}}\right) - a_{13}\frac{в''_3}{a''_{33}}\right).$$

Гаусстун методун тыгыз толтурулган матрицалуу системалар үчүн пайдалануу максатка ылайыктуу. Матрицанын бардык элементтери жана системадагы теңдемелердин оң жагы компьютердин оперативдик эсинде болот. Эсептөө көлөмү системанын $n$ тартибинен аныкталып, аткарылган арифметикалык амалдардын саны $(2/3)n^3$ барабар.

Мисал. Гаусстун методу менен төмөнкү сызыктуу системаны чечүү алгоритмин жана бул методдун кээ бир өзгөчөлүктөрүн карайлы:

$$\begin{aligned} 10x_1 - 7x_2 \phantom{{}+6x_3} &= 7, \\ -3x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 4, \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 &= 6. \end{aligned}$$

Экинчи жана үчүнчү теңдемелерден $x_1$ белгисизин жоёлу. Ал үчүн, адегенде биринчи теңдемени $0.3$ кө көбөйткөндөн кийин экинчи теңдемеге кошуп, андан кийин биринчи эле теңдемени 0.5ке көбөйткөндөн кийин үчүнчү теңдемеге кошуп, төмөнкү системаны алабыз:

$$\begin{aligned} 10x_1 - 7x_2 \quad &= 7, \\ -0.1x_2 + 6x_3 &= 6.1, \\ 2.5x_2 + 5x_3 &= 2.5. \end{aligned}$$

Үчүнчү теңдемедеги $x_2$ белгисизин жоёрдон мурда, экинчи теңдемедеги $x_2$ белгисизинин коэффициенти (негизги элемент) кичине сан экендигин байкап, экинчи жана үчүнчү теңдемелердин орундарын алмаштырсак жакшы болмок. Бирок, азыр биз арифметикалык амалдарды так жүргүзгөндүктөн, тегеректөөдөгү каталыктар коркунучтуу эмес, андыктан жоюну улантабыз. Экинчи теңдемени 25 ке көбөйткөндөн кийин үчүнчү теңдемеге кошсок, үч бурчтук көрүнүштөгү система алабыз:

$$\begin{aligned} 10x_1 - 7x_2 \quad &= 7, \\ -0.1x_2 + 6x_3 &= 6.1, \\ 155x_3 &= 155. \end{aligned}$$

Муну менен Гаусстун методунун түз жүрүшү бүтөт.

Тескери жүрүшү $x_3, x_2, x_1$ белгисиздерин тиешелүү түрдө үчүнчү, экинчи, биринчи теңдемелерден удаалаш эсептөөдөн турат. Бул эсептөөлөрдү жүргүзөлү:

$$x_3 = \frac{155}{155} = 1, \; x_2 = \frac{6x_3 - 6.1}{0.1} = -1, \; x_1 = \frac{7x_2 + 7}{10} = 0.$$

Демек, (0, -1, 1) баштапкы системанын чечими экендигине, ал системага коюп оңой эле ишенүүгө болот.

Бул чечим сакталып тургудай кылып системанын коэффициенттерин өзгөртүп, аны менен бирге, эсептөө учурунда санды тегеректөөнү пайдаланалы. Мындай шарттардагы тиешелүү системанын жекече учурун карайлы:

$$\begin{aligned} 10x_1 - 7x_2 \quad &= 7, \\ -3x_1 + 2.099x_2 + 6x_3 &= 3.901, \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 &= 6. \end{aligned}$$

Мында экинчи теңдемедеги $x_2$ белгисизинин коэффициенти жана барабардыктын оң жагы өзгөртүлгөн. Кайрадан жоюу процессин улантуу үчүн, сандардын үстүнөн болгон арифметикалык амалдарды эсептөөнү, беш разрядка чейин сакталган чекити жылып жүрүүчү формада жүргүзөлү. Жоюунун биринчи кадамынан кийин төмөнкү системаны алабыз:

$$\begin{aligned} 10x_1 - 7x_2 \quad &= 7, \\ -0.001x_2 + 6x_3 &= 6.001, \\ 2.5x_2 + 5x_3 &= 2.5. \end{aligned}$$

Жоюнун кийинки кадамын башкы элемент (-0.001) кичине болгон учурда жүргүзөлү. Үчүнчү теңдемеден $x_2$ белгисизин жоюу үчүн экинчи теңдемени 2500 көбөйтүүгө аргасыз болобуз. 6.001 ди 2500 гө көбөйтсөк, 15002.5 санын алабыз, аны беш разрядга чейин тегеректеп 2.5 ке кошобуз. Алынган сан 15006 га чейин тегеректелет. Жыйынтыгында үчүнчү теңдеме төмөнкү көрүнүштө болот:

$$15005x_3 = 15006.$$

Мындан $x_3 = 15006/15005 = 1.0001$. Экинчи жана үчүнчү теңдемелерден тиешелүү $x_2$ жана $x_1$ белгисиздери табылат:

$$x_2 = \frac{6.001 - 6 \cdot 1.0001}{-0.001} = -0.4, \quad x_1 = \frac{7 + 7 \cdot (-0.4)}{10} = 0.42.$$

Эсептөө компьютердеги эсептөө процессине окшош беш разрядка чейин тегеректелип жүргүзүлдү. Анын жыйынтыгында (0, -1, 1) чечимдин ордуна (0.42, -0.4, 1.0001) чечими алынды.

Мындай чоң дал келбестик негизги элементтин кичине болгондугу менен түшүндүрүлөт. Аны тастыктоо үчүн, үчүнчү теңдемедеги $x_2$ белгисизин жоюуга чейин, системадагы теңдемелердин орундарын алмаштырабыз:

$$\begin{aligned} 10x_1 - \quad 7x_2 &= 7, \\ 2.5x_2 + 5x_3 &= 2.5, \\ -0.001x_2 + 6x_3 &= 6.001. \end{aligned}$$

Эми үчүнчү теңдемеден (мурдагы экинчи) $x_2$ белгисизин жоюу үчүн, ага экинчи теңдемеге 0.0004 тү көбөйтүп, жыйынтыгын кошобуз (мында негизги элемент 2.5 ке барабар). Анда үчүнчү теңдеме төмөнкү көрүнүштү алат:

$$6.002x_3 = 6.002.$$

Мындан $x_3 = 1$ болуп, системадагы экинчи жана биринчи теңдемелердин жардамында $x_2$, $x_1$ эсептелинет:

$$x_2 = \frac{2.5 - 5 \cdot 1}{2.5} = -1, \quad x_1 = \frac{7 + 7 \cdot (-1)}{10} = 0.$$

Демек, теңдемелердин орундарын алмаштыруунун жыйынтыгында, б. а. калган, берилген мамычадагы элементтердин ичинен модулу боюнча эң чоңун тандоодо, берилген тактыктагы чечимдин каталыгы жоголду.

### 7.6. Аныктагыч жана тескери матрица.

Мурда белгиленгендей, аныктагычты түздөн-түз табуу чоң көлөмдөгү эсептөөлөрдү талап кылат. Аны менен бирге, үч бурчтук матрицанын аныктагычы оңой эле эсептелинет, ал диагоналдык элементтердин көбөйтүндүсүнө барабар.

Матрицаны үч бурчтук көрүнүшкө келтирүү үчүн жоюу методун пайдалануу керек, б. а. Гаусстун методунун түз жүрүшүн. Элементтерди жоюу процессинде аныктагычтын чоңдугу өзгөрбөйт. Жолчолордун же мамычалардын ордун алмаштырууда аныктагычтын белгиси карама-каршысына өзгөрөт. Ошондуктан, $A$ матрицасын үч бурчтук көрүнүшкө келтиргенден кийин, аныктагычтын мааниси төмөнкү формула боюнча эсептелинет:

$$\det A = (-1)^k \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Мындагы $a_{ii}$ диагоналдык элементтери баштапкы матрицадан эмес, өзгөртүлгөн матрицадан алынат. $k$ аркылуу матрицаны үч бурчтук көрүнүшкө келтирүүдөгү жолчолордун (же мамычалардын) орун алмаштырууларынын саны белгиленген. Жоюу методунун натыйжасында 1000-чи жана андан чоң тартиптеги аныктагычтарды эсептөөгө болот.

Гаусстун методу сызыктуу теңдемелер системасын чыгарууда, чындыгында универсалдуу метод болуп саналат. Биз бул методдун колдонулушун тескери матрицаларды эсептөөдө көрсөтөлү.

Практикада, тескери матрицаны эсептөөнүн бул эң жөнөкөй ыкмасы төмөнкү кадамдардан турат:

1. $A$ матрицасына карата изделүүчү тескери матрицаны табуу үчүн, ал матрицанын оң жагына $E$ бирдик матрицаны жазуу керек, б.а. $(A/E)$ – кеңейтилген матрица алынат.

2. $(A|E)$ кеңейтилген матрицанын жолчолорунун үстүнөн, Гаусстун методунда өзгөртүп түзүү жолу менен $A$ матрицасы бирдик матрицага келтирилет.

3. Жогоруда көрсөтүлгөн эсептөө процесстери бүткөндөн кийин б.а. баштапкы $A$ матрицасынын ордуна бирдик матрица түзүлөт, ал эми оң жагына жазылган $E$ бирдик матрицанын ордуна $A^{-1}$ тескери матрица алынат. Башкача айтканда, $(A|E)$ кеңейтилген матрицанын ордуна, жыйынтыгында $(E|A^{-1})$ кеңейтилген матрица алынат.

Бул амалдардын удаалаштыгын төмөнкү мисалда көрсөтөлү.

Мисал. Берилген матрицага тескери матрицаны тапкыла:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Чыгаруу. 1. Кеңейтилген матрицаны жазалы:

$$(A|E) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Мында стрелка аркылуу эквиваленттүү системалардын кеңейтилген матрицасына өтүү көрсөтүлгөн.

2. Төмөндө кеңейтилген матрицанын оң жагындагы кашаанын ичиндеги сан, матрицанын тиешелүү жолчосуна көбөйтүлүп, андан кийин ал жолчо төмөнкү (же жогорку) жолчого кошулаары көрсөтүлгөн. Ал эми стрелканын алдындагы сан кадамдын номерин көрсөтүп турат.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)(-3) \quad (1)\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)_{(1)} (2)\Rightarrow$$

$$(2)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&1\\0&-2&-3&1\end{array}\right)(-1/2)\quad(3)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&1\\0&1&3/2&-1/2\end{array}\right).$$

**Эсептөөнүн акыркы кадамы ((3) стрелкасында көрсөтүлгөн) кеңейтилген матрицанын экинчи жолчосун (-2) санына бөлүүдөн турат.**

**Ошентип, тескери матрица**

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\3/2&-1/2\end{pmatrix}$$

**көрүнүштө болот. Матрицаларды көбөйтүп, тескери матрицанын аныктоосу боюнча, жүргүзүлгөн эсептөөлөрдүн тууралыгын оңой эле текшерүүгө болот.**

### 7.7. Матрицанын өздүк маанилери жана өздүк векторлору.

**Көп сандагы илимий – техникалык маселелер матрицанын өздүк маанилерин жана өздүк векторлорун табууну талап кылат.**

**n – чи тартиптеги квадраттык матрицаны карайлы**

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}. \tag{8}$$

***Аныктама.*** *$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ вектору $A$ матрицасынын $\lambda$ өздүк маанисине туура келүүчү, өздүк вектору деп аталат, эгерде ал*

$$Ax=\lambda x \tag{9}$$

*теңдемелер системасын канааттандырса.*

***Аныктама.*** *Берилген $A$ матрицасынын $C$ мүнөздүк матрицасы деп,*

$$C=A-\lambda E=\begin{pmatrix}a_{11}-\lambda&a_{12}&\dots\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}-\lambda&\dots\dots&a_{2n}\\\dots\dots&\dots\dots&\dots\dots&\dots\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots\dots&a_{nn}-\lambda\end{pmatrix}, \tag{10}$$

*көрүнүштөгү матрицаны айтабыз, мында $E$ – бирдик матрица.*

**Көрүнүп тургандай, (9) системасын**

$$(A-\lambda E)x=0 \quad \text{же} \quad Cx=0 \tag{11}$$

**көрүнүштө жазууга болот.**

**Эгерде $x$ векторунун координаталык формадагы жазылышына өтсөк, анда (8) матрицасын эске алып, (9) системасын төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:**

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}\ +\ (a_{22}-\lambda)x_2+\dots+a_{2n}x_n=0,\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0.\end{cases} \tag{12}$$

Алынган (11) же (12) системасы $n$ белгисиздүү $n$ сызыктуу теңдемелер бир тектүү система болуп, ар дайым нөлдүк чыгарылышка ээ. Ал нөлдүк эмес чыгарылышка ээ болот, качан гана анын аныктагычы нөлгө барабар болсо: $\det C = 0$, бирок, чечими жалгыз эмес.

$C$ матрицасынын аныктагычы, $\lambda$ га карата $n$-чи даражадагы көп мүчө болуп:

$$\det C = c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\lambda + c_n, \qquad (13)$$

мүнөздүк көп мүчө деп аталат. Бул көп мүчөнүн тамырлары $A$ матрицасынын өздүк маанилери болот.

Матрицанын өздүк векторун табуу үчүн, жалгыз гана чечимге ээ болбогон, сызыктуу алгебралык теңдемелер системасын чыгаруу талап кылынат. Белгилүү болгондой, бул учурда системанын жалпы чыгарылышынын структурасы төмөнкү көрүнүшкө ээ: эркин деп аталган бир же бир канча белгисиздер каалагандай маанилерди кабыл алат, ал эми калган белгисиздер эркин белгисиздер аркылуу туюнтулат. Эркин белгисиздердин саны, калган теңдемелердин натыйжасы болгон системадагы теңдемелердин санына барабар. Практикада, эгерде эркин белгисиз бирөө болсо, аны кээ бир санга барабарлап алабыз, мисалы, бирге. Андан кийин калган белгисиздер (векторудун компоненттери) калган теңдемелердин натыйжасы болгон теңдемени алып салгандан кийинки сызыктуу көз карансыз эмес теңдемелер системасынан бир маанилүү табылат. Бул процедура маселенин жыйынтык чечимине таасир этпейт, андыктан белгилеп өткөндөй, өздүк векторлор турактуу көбөйтүүчүгө чейинки тактыкта табылат.

Мисал. Матрицанын өздүк маанилерин жана өздүк векторлорун эсептейли:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1, & 4 \end{pmatrix}$$

Чыгаруу. Мүнөздүк көп мүчөнү түзөбүз

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10.$$

Экинчи даражадагы бул көп мүчөнүн тамырларын табабыз:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 5.$$

$\lambda_1 = 2$ үчүн, төмөнкүнү алабыз

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 2 \\ 1 & 4-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ же } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Бул бир эле теңдеме, андыктан, системанын аныктагычы нөлгө барабар.

$x_2 = в$ эркин өзгөрүлмө деп, биринчи $x_1 = (-2в, в) = в(-2,1)$ өздүк векторун алабыз. Экинчи, $\lambda_2 = 5$ өздүк маанисин коюп:

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0, \\ \quad x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

мындан, $x_1 = c$ эркин өзгөрүлмөсү аркылуу $A$ матрицасынын экинчи өздүк вектору аныкталат: $x_2 = (c,c) = c(1,1)$.

$в$ жана $c$, каалагандай сан болгондуктан, бир эле өздүк мааниге бир нече өздүк векторлор тура келет. Мисалы, бир тектүү системанын фундаменталдык чыгарылышына туура келүүчү өздүк векторлор $x_1 = (-2,1)$, $x_2 = (1,1)$ көрүнүштө болот.

Биз, экинчи тартиптеги матрица үчүн, өздүк маанилерди жана өздүк векторлорду эсептөөнүн эң жөнөкөй мисалын карадык. Кээ бир атайын учурлар үчүн жана үчүнчү тартиптеги матрицалар үчүн, маселенин чыгарылышын окшош жүргүзүү кыйынчылыкты туудурбайт.

Жалпы учурда, үзгөчө жогорку тартиптеги матрицалар үчүн, алардын өздүк маанилерин жана өздүк векторлорун табуу, өздүк маанилердин толук проблемасы деп аталган маселе, бир кыйла таталыраак.

Баштапкы матрицанын жекече типтери үчүн, өздүк маанилердин кээ бир касиеттерин белгилеп өтөлү:

- Симметриялык матрицанын бардык өздүк маанилери чыныгы.
- Эгерде матрицанын өздүк маанилери чыныгы жана ар түрдүү болсо, анда аларга туура келген өздүк векторлор ортогоналдуу жана каралган мейкиндикте базисти түзөт. Ошондуктан, учурдагы мейкиндикте, каалагандай векторду, сызыктуу көз каранды эмес өздүк векторлордун жыйындысы аркылуу көрсөтүүгө болот.
- Эгерде $A$ жана $B$, эки матрица окшош болсо, б.а. алар

$$B = P^{-1}AP \tag{14}$$

катышында байланышса, анда алардын өздүк маанилери дал келет, мында $P$ – кээ бир матрица.

Окшош өзгөртүп түзүүнү баштапкы матрицаны жөнөкөйлөтүү үчүн пайдаланууга болот, ал эми анын өздүк маанилерин эсептөө жөнүндөгү маселе, жөнөкөй матрица үчүн окшош маселеге алынып келет. Каралган матрица эң мыкты жөнөкөйлөндү деп айтабыз, эгерде ал үч бурчтук көрүнүшкө келтирилген болсо:

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Анда (8) матрицасы дагы үч бурчтук көрүнүштө болот. Бизге белгилүү, үч бурчтук матрицанын аныктагычы, анын диагоналдык элементтеринин көбөйтүндүсүнө барабар, андыктан, (13) мүнөздүк көп мүчө, бул учурда төмөнкү көрүнүштү алат.

$$\det C = (a'_{11} - \lambda)(a'_{22} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a'_{nn} - \lambda).$$

Бул көп мүчөнүн тамырларына барабар болгон матрицанын өздүк маанилерин, дароо эле алабыз:

$$\lambda_1 = a'_{11},\ \lambda_2 = a'_{22},\ \dots,\ \lambda_n = a'_{nn}.$$

Демек, үч бурчтук матрицанын өздүк маанилери, анын диагоналдык элементтерине барабар. Бул, албетте, үч бурчтук матрицанын жекече учуру болгон, диагоналдык матрицага дагы тиешелүү.

Окшош өзгөртүп түзүүнүн жардамы менен кээ бир типтеги матрицалар, үч бурчтук көрүнүшкө алынып келет. Аны менен катар, симметриялык матрицаны диагоналдык көрүнүшкө келтирүүгө болот. Практикада симметриялык матрицаны үч диагоналдуу көрүнүшкө келтирүү көп пайдаланылат. Алынган матрица үчүн, өздүк маанилерди эсептөө процедурасы, баштапкы матрица үчүн маселеге салыштырмалуу бир кыйла жөнөкөйлөйт.

## 8-ГЛАВА. АФФИНДИК МЕЙКИНДИКТЕГИ КВАДРАТТЫК ФОРМАЛАР ЖАНА КВАДРИКАЛАР

### 8.1. Квадраттык форма жана анын каноникалык көрүнүшү

***Аныктама.*** *$x_1, x_2,..., x_n$ өзгөрмөлөрүнөн турган экинчи даражалуу бир тектүү көп мүчөнү квадраттык форма деп атайбыз. Анын жалпы формасы:*

$$f(x_1, x_2,..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_i x_j, \tag{1}$$

*мында $x_1, x_2,..., x_n$ өзгөрмөлөрү $A_n$ аффиндик мейкиндигиндеги кандайдыр бир чекиттин координаталары же $V_n$ вектордук мейкиндигиндеги вектордун координаталары.*

***Аныктама.*** $x_1, x_2,..., x_n$ өзгөрмөлөрүнөн $y_1, y_2,..., y_n$ өзгөрмөлөрүнө

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j, \; i = \overline{1,n} \tag{2}$$

өзгөртүп түзүүсү боюнча өзгөртүү сызыктуу өзгөртүп түзүү деп аталат.

Аныктоо боюнча $x_1, x_2,..., x_n$ өзгөрмөлөрү $A_n$ мейкиндигиндеги кандайдыр бир чекиттин $(e)=(\vec{e}_1, \vec{e}_2,...,\vec{e}_n)$ базисине карата координаталары болсо, ал эми $y_1, y_2,..., y_n$ өзгөрмөлөрү ошол эле чекиттин кандайдыр бир $(e')=(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2,...,\vec{e}'_n)$ базисиндеги координаталары болсо, анда (2) формула $(e)$ базисинен $(e')$ базисине өтүүнүн формуласы болот.

$(e)$ базисинен $(e')$ базисине өтүү $n$ өзгөрмөлүү сызыктуу өзгөртүп түзүү болсо, анда $(e)$ базисинен $(e'')$ базисине өтүү да $n$ өзгөрмөлүү сызыктуу өзгөртүп түзүү болуп эсептелинет.

Бул операция $n$ өзгөрмөлүү сызыктуу өзгөртүп түзүүнүн композициясы деп аталат.

$$f:(e)\to(e'),$$

$$g:(e')\to(e''), \; g\circ f:(e)\to(e'')$$

Эгерде $(e)$ базисинен $(e'')$ базисине өтүү $n$ өзгөрмөлүү сызыктуу өзгөртүп түзүү болсо, анда тескери чагылтуу жашайт жана ал чагылтуу да $n$ өзгөрмөлүү сызыктуу өзгөртүп түзүү деп аталат.

Демек, $n$ өзгөрмөлүү сызыктуу өзгөртүп түзүүлөрдүн көптүгү группа болот.

***1-лемма.*** *Эгерде (1) квадраттык форма өзгөрмөлөрдүн квадраттарын кармабаса, анда сызыктуу өзгөртүп түзүүнүн негизинде жок дегенде бир өзгөрмөнүн квадратын бөлүп алууга болот.*

Конкретүү $i, j$ сандары үчүн $2c_{ij}x_i x_j$ мүчөсү жашасын. Төмөндөгүдөй өзгөртүп түзүүнү киийребиз:

$$\begin{cases} x_i = y_i + y_j, \\ x_i = y_i - y_j, \\ x_k = y_k. \end{cases} \tag{3}$$

**2-лемма.** *Эгерде (1) квадраттык форма бир өзгөрмөнүн квадратын кармаса жана ал өзгөрмөнү кармаган көбөйтүүчүлөр жашаса, анда сызыктуу өзгөртүп түзүүнүн негизинде*

$$f = d_{ii}y_i^2 + g \tag{4}$$

*көрүнүшүндөгү формага алып келүүгө болот.*

Далилдөө. (1) квадраттык формасы $x_i^2$ мүчөсүн кармасын. Анда

$$f = c_{ii}x_i^2 + 2c_{i1}x_ix_1 + 2c_{i2}x_ix_2 + ... + 2c_{im}x_ix_m + g_1$$

мында $g_1 - x_i$ өзгөрмөсүн кармабаган (1) квадраттык форманын калган мүчөлөрүнөн турган көп мүчө.

$$y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + ... + c_{im}x_m$$

деп белгилеп алалы.

$$y_i^2 = c_{ii}x_i^2 + 2c_{i1}x_ic_{ii}x_i + 2c_{i2}x_2c_{ii}x_i + ... + 2c_{im}x_mc_{ii}x_i + g_2$$

мында $g_2 - x_i$ мүчөсүн кармабаган көп мүчө. $y_i^2$ көп мүчөсүн $c_{ii}$ коэффициентине бөлүп, $f$ квадраттык формасынан кемитебиз.

$$f - \frac{1}{c_{ii}}y_i^2 = g_1 - \frac{1}{c_{ii}}g_2,$$

$$d = \frac{1}{c_{ii}},\ g = g_1 - \frac{1}{c_{ii}}g_2 \Rightarrow f = d_{ii}y_i^2 + g.$$

***Аныктама.*** *(1) квадраттык форманын $y_1, y_2, ..., y_n$ өзгөрмөлөрүнүн*

$$\varepsilon_1y_1^2 + \varepsilon_2y_2^2 + ... + \varepsilon_my_m^2 \tag{5}$$

*көрүнүшүндөгү формасы (1) квадраттык форманын каноникалык формасы деп аталат.*

***Аныктама.*** *(1) квадраттык форманын (5) формасындагы $\varepsilon_i,\ i = \overline{1,m}$ коэффициенттери $\pm 1$, 0 маанилерин кабыл алса, анда ал (1) квадраттык форманын нормалдык формасы деп аталат.*

***Теорема.*** *Ар кандай квадраттык форманы каноникалык жана нормалдык формага алып келүүгө болот.*

Далилдөө. Эгерде квадраттык форма

а) өзгөрмөлөрдүн квадраттарын кармабаса 1-лемманын негизинде жок дегенде бир өзгөрмөнүн квадратын бөлүп алууга болот;

б) жок дегенде бир өзгөрмөнүн квадратын кармаса, анда 2-лемманы пайдаланып, сызыктуу өзгөртүп түзүүнүн негизинде экинчи мүчөнүн квадратын бөлүп алууга болот.

2-лемманы пайдаланып, сызыктуу өзгөртүп түзүүнүн негизинде үчүнчү өзгөрмөнүн квадратын бөлүп алууга болот.

Жогорудагы процессти улантуу менен квадраттык формага кирген бардык өзгөрмөлөрдүн квадраттарын бөлүп алуу менен каноникалык форманы алабыз.

$$f = c_{11}\bar{x}_1^2 + c_{22}\bar{x}_2^2 + c_{nn}\bar{x}_n^2.$$

Төмөндөгүдөй өзгөртүп түзүү киргизебиз:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{|c_1|}}\nu_1, \\ \bar{x}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{|c_2|}}\nu_2, \\ \text{-------} \\ \bar{x}_n = \dfrac{1}{\sqrt{|c_n|}}\nu_n, \end{cases}$$

$$f = \delta_1\nu_1 + \delta_2\nu_2 + \ldots + \delta_n\nu_n,\ \ \delta_i = 1, c_i > 0,\ \ \delta_i = -1, c_i < 0..$$

## 8.2. Квадрика жана аны нормалдык көрүнүшкө келтирүү

***Аныктама.*** *$A_n$ аффиндик мейкиндигиндеги координаталары экинчи даражалуу теңдемени канааттандырган чекиттердин көптүгү квадрика деп аталат*

$$A_n : f_{ij} + 2f_i(x) + c = 0, \tag{1}$$

*мында* $f_i(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i$, $c_i$ - бош мүчөлөр.

$A_2$ мейкиндигинде квадрика экинчи тартиптеги ийри сызыкты аныктайт.

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 + c = 0.$$

$A_3$ мейкиндигинде квадрика экинчи тартиптеги бетти аныктайт.

***Теорема.*** *Кандайдыр бир координаталар системасында чекиттердин көптүгү экинчи даражалуу теңдемени аныктаса, анда башка бир координаталар системасында да ал чекиттер экинчи даражалуу теңдемени аныктайт.*

Ар кандай квадрика өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамында төмөндөгү формалардын бирөөсүнө келтирилиши мүмкүн:

$$\varepsilon_1\vartheta_1^2 + \varepsilon_2\vartheta_2^2 + \ldots + \varepsilon_m\vartheta_m^2 = 0, \tag{2}$$

$$\varepsilon_1\vartheta_1^2 + \varepsilon_2\vartheta_2^2 + \ldots + \varepsilon_m\vartheta_m^2 = 1, \tag{3}$$

$$\varepsilon_1\vartheta_1^2 + \varepsilon_2\vartheta_2^2 + \ldots + \varepsilon_m\vartheta_m^2 = 2\vartheta_{m+1}, \tag{4}$$

(1) - квадрикасына $x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}y_j,\ i = \overline{1, n}$ өзгөртүп түзүүсүн колдонуу менен төмөнкү көрүнүштөгү теңдемени алабыз:

$$p_1y_1^2 + p_2y_2^2 + \ldots + p_my_m^2 + 2d_1y_1 + 2d_2y_2 + \ldots + 2d_ny_n + c = 0. \tag{5}$$

(1) - теңдемеде ар бир өзгөртүлгөн толук квадратын бөлүп алабыз жана

$$y_i + \frac{d_i}{p_i} = z_i,\ i = \overline{1, m},\quad y_k = z_k,\ i = \overline{m+1, n},\quad c - \sum \frac{d_i}{p_i} = -p,\ i = \overline{1, m}$$

өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамында төмөндөгүнү алабыз:

$$p_1 z_1^2 + p_2 z_2^2 + \ldots + p_m z_m^2 + 2d_{m+1} z_{m+1} + \ldots + 2d_n z_n = p. \qquad (6)$$

1) $d_{m+1},\ldots,d_n = 0,\ p \neq 0,$

$$p_1 z_1^2 + p_2 z_2^2 + \ldots + p_m z_m^2 = p,$$

$$\begin{cases} z_i = \sqrt{\left|\frac{p}{p_i}\right|}\,\vartheta_i, \\ z_k = \vartheta_k, \end{cases}$$

$$\varepsilon_1 \vartheta_1^2 + \varepsilon_2 \vartheta_2^2 + \ldots + \varepsilon_m \vartheta_m^2 = 1,$$

$$\varepsilon = 1,\ \frac{p}{p_i} > 0,$$

$$\varepsilon = -1,\ \frac{p}{p_i} < 0.$$

2) $d_{m+1} = \ldots = d_n = p = 0,\ p_1 z_1^2 + p_2 z_2^2 + \ldots + p_m z_m^2 = 0,$

$$z_i = \sqrt{\left|\frac{1}{p_i}\right|}\,\vartheta_i,$$

$$\varepsilon_1 \vartheta_1^2 + \varepsilon_2 \vartheta_2^2 + \ldots + \varepsilon_m \vartheta_m^2 = 0,$$

$$\varepsilon = 1,\ p_i > 0,$$

$$\varepsilon = -1,\ p_i < 0.$$

3) $d_{m+1},\ldots,d_n$ коэффициенттеринин жок дегенде бирөөсү нөлгө барабар эмес болсун.

$$d_{m+1} \neq 0,$$

$$p_1 z_1^2 + p_2 z_2^2 + \ldots + p_m z_m^2 + 2d_{m+1} z_{m+1} = 0,$$

$$\begin{cases} z_i = \frac{\vartheta_i}{\sqrt{p_i}}, \\ z_k = \vartheta_k, \end{cases}$$

$$\varepsilon_1 \vartheta_1^2 + \varepsilon_2 \vartheta_2^2 + \ldots + \varepsilon_m \vartheta_m^2 = 2\vartheta_{m+1}.$$

***Аныктама.*** $S$ чекити квадриканын борбору деп аталат, эгерде квадриканын каалаган чекитине $S$ чекитине карата симметриялуу болгон чекиттер да квадрикага таандык болсо.

Квадриканы классификациялоо:

**1. Эллипсоид, гиперболоид.**

(1) - теңдемеде $m=n$ болсо, анда

$$\varepsilon_1\vartheta_1^2+\varepsilon_2\vartheta_2^2+\ldots+\varepsilon_m\vartheta_m^2=1, \qquad (7)$$

теңдемесин алабыз.

а) (7) теңдемесинде $\varepsilon=1$ болсо, анда квадрика эллипсоид деп аталат.

б) (7) теңдемесинде $\varepsilon$ ар кандай болсо, анда квадрика гиперболоид деп аталат.

в) (7) теңдемесинде $\varepsilon=-1$ болсо, анда биз чыныгы аффиндик мейкиндикти карагандыктан (2) канааттандырган чекиттер жашабайт.

**2. Конустар.**

(3) теңдемесинде $m=n$ болсо, анда төмөнкү теңдемени алабыз:

$$\varepsilon_1\vartheta_1^2+\varepsilon_2\vartheta_2^2+\ldots+\varepsilon_n\vartheta_n^2=0, \qquad (8)$$

Бул теңдемедеги $\varepsilon_i\,(i=\overline{1,n})$ үчүн 1 жана –1 гана туура келсе, анда квадрика конус деп аталат. Эгерде -1 жана 1 гана туура келсе, анда квадрика мнимый конус деп аталат.

Чокусу координата башталышында, жалгыз гана чекиттен турган конус болот.

**3. Параболоиддер.**

(4) формасында $m=n-1$ болсо, анда

$$\varepsilon_1\vartheta_1^2+\varepsilon_2\vartheta_2^2+\ldots+\varepsilon_{n-1}\vartheta_{n-1}^2=2\vartheta_n. \qquad (9)$$

теңдемесин алабыз.

Бул теңдемедеги $\varepsilon_i\,(i=\overline{1,n})$ үчүн 1 жана –1 маанилери гана туура келсе, анда квадрика эллиптикалык параболоид деп аталат. Эгерде аралаш маанилерди кабыл алса, анда квадрика гиперболалык параболоид деп аталат.

$\vartheta_1^2+\vartheta_2^2=1$ - эллипс,

$\vartheta_1^2=1$ - параллель түгөй түздөр,

$\vartheta_1^2=-1$ - мнимый параллель түгөй түздөр,

$\vartheta_1^2+\vartheta_2^2=0$ - кесилишүүчү түгөй түздөр,

$\vartheta_1^2-\vartheta_2^2=0$ - өз ара кесилишүүчү түгөй түздөр,

$\vartheta_1^2+\vartheta_2^2=2\vartheta_3$ - эллиптикалык цилиндр,

$\vartheta_1^2-\vartheta_2^2=2\vartheta_3$ - гиперболалык цилиндр.

## 9-ГЛАВА. САЛЫШТЫРУУЛАР ТЕОРИЯСЫНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

### 9.1. Салыштыруулар жана алардын касиеттери

$Z$ алкагын карайлы жана $m \in Z,\ m \neq 0$ санын алалы.

***Аныктама.*** Эгерде $a, b$ сандарынын айырмасы $m$ бөлүнсө, анда алар $m$ модулу боюнча салыштырылуучу деп аталат, б.а.

$$a \equiv b(\bmod m) \overset{def}{\Leftrightarrow} (a-b) \vdots m.$$

Мисалы, $m=6$ болсо, анда

$$24 \equiv 42(\bmod 6) \overset{def}{\Leftrightarrow} (24-42) \vdots 6, \qquad 5 \neq 15(\bmod 6)$$

Берилген модул боюнча салыштыруу төмөндөгү касиеттерге ээ:

$1^0$. Берилген модул боюнча салыштыруу $Z$ көптүгүндө аныкталган эквиваленттик катыш болот.

Далилдөө. а) Кагыштын рефлексивдүүлүгүн далилдейбиз: $\forall a \in Z : a-a \equiv 0 \vdots m \Rightarrow a \equiv a(\bmod m)$ болгондуктан $\forall a \in Z : a \equiv a(\bmod m)$ .

б) Катыштын симметриялуулугун далилдейбиз: $a \equiv b(\bmod m) \Rightarrow (a-b) \vdots m \Rightarrow -(b-a) \vdots m \Rightarrow b \equiv a(\bmod m)$ болгондуктан $\forall a,b \in Z : a \equiv b(\bmod m) \Rightarrow b \equiv a(\bmod m)$ болот.

в) Катыштын транзитивдүүлүгүн далилдейбиз:

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b(\bmod m) \\ b \equiv c(\bmod m) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (a-b) \vdots m \\ (b-c) \vdots m \end{array}\right\} \Rightarrow \exists q_1, q_2 : \left.\begin{array}{l} (a-b) = mq_1 \\ (b-c) = mq_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(a-c) = m(q_1+q_2) \Rightarrow (a-c) \vdots m \Rightarrow a \equiv c(\bmod m).$$

$2^0$. Салыштырууларды мүчөлөп кошууга (кемитүүгө) болот, б.а.

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b(\bmod m) \\ b \equiv c(\bmod m) \end{array}\right\} \Rightarrow (a \pm c) = (b \pm d)(\bmod m).$$

$3^0$. Салыштыруунун эки жагын тең даражага көтөрүүгө болот, б.а.

$$a \equiv b(\bmod m) \Rightarrow a^n \equiv b^n(\bmod m).$$

$4^0$. Салыштыруунун каалаган жагына модулга эселүү болгон санды кошууга же кемитүүгө болот, б.а.

$$a \equiv b(\bmod m) \Rightarrow a \pm km \equiv b \pm km(\bmod m).$$

$5^0$. Салыштыруунун эки жагын тең жана модулду бир эле санга көбөйтүүгө болот, б.а.

$$a \equiv b(\bmod m) \Rightarrow \forall k \in Z : ak \equiv bk(\bmod mk).$$

$6^0$. Салыштыруунун эки жагын тең модул менен өз ара жөнөкөй санга гана кыскартууга болот, б.а.

$$ak \equiv bk(\bmod m) \underset{(k,m)=1}{\Rightarrow} a \equiv b(\bmod m).$$

$7^0$. Эгерде $a$ менен $b$ сандары $m_1$ модулу боюнча салыштырылуучу болсо, о.э. $a$ менен $b$ сандары $m_2$ модулу боюнча салыштырылуучу болсо, жана $a$ менен $b$ бир нече сандын модулу боюнча салыштырылуучу болсо, анда алар $m_1, m_2, ..., m_k$ сандарынын жалпы эселүүсү модулу боюнча салыштырылуучу болот.

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b(mod\, m_1) \\ a \equiv b(mod\, m_2) \\ ---------- \\ a \equiv b(mod\, m_k) \end{array}\right\} \Rightarrow a \equiv b(mod\,[m_1, m_2, ..., m_k]).$$

## 9.2. Чегериштердин толук жана келтирилген системалары

$Z$ алкагын карайлы. Айталы $m \in Z$ жана $m > 0$ болсун. $m$ модулу боюнча салыштыруу $Z$ көптүгүндө аныкталган эквиваленттик катыш болгондуктан, ал $Z$ көптүгүн эквиваленттик класстарга бөлүктөйт.

$$mod\, m_a = \{x \in Z / x \equiv a(mod\, m)\} = \overline{a}$$

$a$ элементи тарабынан жаратылган эквиваленттик класс.

$$\overline{0} = \{x \in Z / x \equiv 0(mod\, m)\} = \{x \in Z / x \vdots m\} =$$
$$= \{x \in Z / x \equiv mq \wedge q \in Z\} = \{mq / q \in Z\}$$

$0$ элементи аркылуу жаратылган эквиваленттик класс, калдыксыз $m$ элементине бөлүнгөн сандардын көптүгү болот.

$\overline{1} = \{x \in Z / x \equiv 1(mod\, m)\} = \{mq + 1 / q \in Z\}$ 1 элементи аркылуу жаратылган класс, $m$ элементине 1 калдыгы менен бөлүнгөн бүтүн сандардын көптүгү. $\overline{m-1} = \{x \in Z / x \equiv (m-1)(mod\, m)\} = \{mq + (m-1) / q \in Z\}$ $m-1$ аркылуу жаратылган класс, $m$ элементине $m-1$ калдыгы менен бөлүнгөн бүтүн сандардын көптүгү.

$$Z = \overline{0} \cup \overline{1} \cup ... \cup \overline{m-1}.$$

$Z$ көптүгүнүн класстарга ажыралышындагы класстардын көптүгүн фактор көптүк деп атайбыз, жана фактор көптүктү - $Z_m$ аркылууу белгилейли:

$Z_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$.

***Теорема.*** *$Z_m$ - алкак болот.*

Далилдөө. $Z_m$ көптүгүндө "$+$" жана "$\times$" амалдарына карата аныктама берели.

***1-аныктама.*** *Эквиваленттик класстардын суммасы ал эквиваленттик класстарды жараткан элементтердин суммасынын эквиваленттик классына барабар, б.а.*

$$\forall \overline{a}, \overline{b} \in Z_m : \overline{a} + \overline{b} \overset{def}{=} \overline{a+b} \in Z_m.$$

***2-аныктама.*** *Эквиваленттик класстардын көбөйтүндүсү ал эквиваленттик класстарды жараткан элементтердин көбөйтүндүсүнүн эквиваленттик классына барабар, б.а.*

$$\forall \overline{a}, \overline{b} \in Z_m : \overline{a} \cdot \overline{b} \overset{def}{=} \overline{a \cdot b} \in Z_m.$$

Жогорудагы амалдарга карата алкактын аныктоосундагы шарттарды жеңил эле текшерүүгө болот. Мисалы, кошуунун ассоциативдик касиетке ээ экенин текшерели, б.а.

$$\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in Z : \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}.$$

болорун көрсөтөлү. Анда $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} + \overline{b + c} = \overline{a + b + c} = \overline{a + (b + c)} =$ $= \overline{(a + b) + c} = \overline{a + b} + \overline{c} = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$. Демек, $\langle Z_m, +, \times \rangle$ - алкак болот.

Айталы, $K$ алкагы берилсин, $a, b \in K$.

***Аныктама.*** *Эгерде $a \neq 0$ жана $b \neq 0$ болуп, $a \cdot b = 0$ болсо, анда $a$ жана $b$ элементтерин $0$ элементинин бөлүүчүлөрү деп атайбыз.*

**Мисал.** $K = Z_6$, $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{0}, \overline{3} \cdot \overline{4} = \overline{0}$. Анда 2, 3, 4 элементтери $0$ элементинин бөлүүчүлөрү болот. $K = Z$ үчүн $0$ элементинин бөлүүчүлөрү жок.

***Аныктама.*** *Эгерде $K$ алкагында $0$ элементинин бөлүүчүлөрү жашабаса, анда $K$ бүтүндүүлүк областы деп аталат.*

**Мисал.** $Z$ - бүтүндүүлүк областы болот, $Z_6$ - бүтүндүүлүк областы болбойт.

***Аныктама.*** *$m$ модулу боюнча салыштыруудан түзүлгөн эквиваленттик класстардын элементтерин чегериштер деп атайбыз.*

***Аныктама.*** *$m$ модулу боюнча ар бир класстан бирден жана бирден гана алынган чегериштердин көптүгү чегериштердин толук системасы деп аталат.*

Чегериштердин толук системасы төмөнкү касиеттерге ээ:

$1^0$. Өз ара эки-экиден салыштырылбоочу болгон $m$ бүтүн саны $m$ модулу боюнча чегериштердин толук системасын түзөт.

$\{r_1, r_2, ..., r_n\}, \ \forall i, j : r_i \neq r_2 (mod\, m).$

Чындыгында эле каалаган $i, j$ лар үчүн $r_i \neq r_j (mod\, m)$ болгондуктан $r_i$, $r_j$ түрдүү класска таандык болушат, б. а. биз алган $m$ санынын ар бири ар башка класска таандык жана алардын саны $m$ болот, бул сандардын көптүгү чегериштердин толук системасын түзөт.

$2^0$. $ax + b$ туюнтмасын карайлы, $(a, m) = 1$ болсун. Эгерде $x$ өзгөрүлмөсү $m$ модулу боюнча чегериштердин толук системасын жүрүп чыкса, анда $ax + b$ туюнтмасы дагы чегериштердин толук системасын (ЧТС) жүрүп чыгат, б. а.

$\{r_1, r_2, ..., r_n\} - ЧТС(mod\, m) \Rightarrow \{ar_1 + b, ar_2 + b, ..., ar_n + b\} - ЧТС(mod\, m).$

Далилдөө: Каршысынан далилдейбиз.

$\exists i, j : ar_i + b \equiv ar_j + b (mod\, m) \Rightarrow ar_i \equiv ar_j (mod\, m) \underset{(a,m)=1}{\Rightarrow} r_i \equiv r_j (mod\, m).$

Бул $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ - чегериштердин толук системасы экенине каршы келет.

$m$ модулу боюнча чегериштердин класстарын жазалы:

$\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}$.

***Аныктама.*** *Эгерде бул класстардан модул менен өз ара жөнөкөй болгон чегериштерди гана алып көптүк түзсөк (бир класстан бир гана чегериш алынат), анда ал түзүлгөн көптүк m модулу боюнча чегериштердин келтирилген системасы деп аталат.*

$$\varphi(m) \stackrel{def}{=} \sum_{\substack{(d,m)=1\\ -1\le d\le m}} 1$$

*- Эйлердин функциясы.*

Чегериштердин келтирилген системасы төмөндөгү касиетке ээ: Эгерде $(a,m)=1$ болсо, анда $x$ өзгөрмөсү $m$ модулу боюнча чегериштердин келтирилген системасын жүрүп чыкканда $ax$ туюнтмасы дагы $m$ модулу боюнча чегериштердин келтирилген системасын жүрүп чыгат.

### 9.3. Эйлердин жана Ферманын теоремалары

***Теорема*** *(Эйлердин теоремасы). Эгерде модул менен a өз ара жөнөкөй болсо, анда*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 (mod\, m)$$

*болот.*

Далилдөө. $m$ модулу боюнча чегериштердин келтирилген системасын карайлы: $\{r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(m)}\}$. $(a,m)=1$ болгондуктан, чегериштердин келтирилген системасынын касиети боюнча $x$ өзгөрүлмөсү $m$ модулу боюнча чегериштердин келтирилген системасын жүрүп чыкканда $ax$ туюнтмасы дагы $m$ модулу боюнча чегериштердин келтирилген системасын жүрүп чыгат, б. а.

$$\left.\begin{array}{l} ar_1 \equiv r_1^1 b(mod\, m) \\ ar_2 \equiv r_2^1 (mod\, m) \\ \dots\dots\dots\dots \\ ar_{\varphi(m)} \equiv br_{\varphi(m)}^1 (mod\, m) \end{array}\right\}$$

Бул салыштырууларды мүчөлөп көбөйтүүдөн төмөнкүнү алабыз:

$$a^{\varphi(m)} r_1 r_2 \dots r_{\varphi(m)} \equiv r_1^1 r_2^1 \dots r_{\varphi(m)}^1 (mod\, m)$$

$r_i^1$ да чегериштердин келтирилген системасын түзгөндүктөн аларды $m$ модулу боюнча тиешелүү түрдө $r_i$ менен алмаштырууга болот, ошондуктан жалпылыкты бузбастан $r_i^1$ ди $r_i$ менен дал келет деп алууга болот жана каалагандай $i$ үчүн $r_i$ менен модул жөнөкөй болгондуктан, бул салыштыруунун эки жагын тең $r_i$ кыскартып жиберүүгө болот жана төмөндөгү келип чыгат:

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 (mod\, m)$$

**Теорема** (Ферманын теоремасы). Эгерде $(a,p)=1$ болсо, анда $a^{p-1}$ менен 1, $p$ модулу боюнча салыштырылуучу болот, б.а.

$$a^{p-1} \equiv 1(mod\, p)$$

болот.

Бул теореманын далилдөөсү жогорку теоремадан келип чыгат.

***Теорема (Ферманын кичине теоремасы).***

$$\forall a \in Z:\ a^{p} \equiv a(mod\, p).$$

Далилдөөсү Ферманын теоремасынан түздөн - түз келип чыгат.

## 9.4. Бир белгисиздүү салыштыруулар

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \equiv 0(mod\, m). \qquad (1)$$

Эгерде $a_0 \vdots m$ болсо, анда (1) бир өзгөрмөлүү $n$-даражалуу салыштыруу деп аталат.

Эгерде $x = x_1$ саны (1) салыштырууга чечим болсо, анда $x_1 \equiv x_1^1(mod\, m)$ дагы (1) салыштырууга чечим болот. Ошондуктан (1) салыштыруунун чечими катарында $\overline{x}_1$ чегериши аркылуу жаратылган классты алабыз, б.а. (1) чечимин

$$x = x_1(mod\, m)$$

көрүнүшүндө жазабыз. Демек, бир өзгөрмөлүү салыштыруулардын чечимин ЧТС тин чегериштерин өзгөрүлмөнүн ордуна коюу жолу менен изилдөөгө болот.

Бир белгисиздүү сызыктуу салыштыруулар.

$$ax \equiv b(mod\, m),\ a \vdots m \qquad (2)$$

көрүнүшүндөгү салыштыруу бир белгисиздүү сызыктуу салыштыруу деп аталат.

Төмөндөгүдөй учурлар болот:

1) $(a,m)=1$ болгон учур. Бул учурда $x$ өзгөрүлмөсү $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ $m$ модулу боюнча чегериштердин толук системасы толук жүрүп чыкканда $ax+b$ туюнтмасы дагы $m$ модулу боюнча

$$\{ar_1+b,\ ar_2+b, \ldots,\ ar_n+b\} - ЧТС(mod\, m)$$

болсо, анда ушулардын ичинен бирөө жана бирөө гана салыштыруунун чечими болот.

2) $(a,m)=d>1$ болгон учур.

Бул учурда $b \vdots d$ же $b \vdots d$ болбогон эки учурду карайбыз.

I. $b \vdots d$ болбогон учур. Бул учурда (2) сызыктуу салыштыруунун чечими жашасын дейли, б. а.

$$x = x_0(mod\, m)$$

көрүнүшүндө болот.

$$ax_0 \equiv b(mod\, m) \Rightarrow (ax_0 - b) \vdots m \Rightarrow \exists q \in Z : ax_0 - b = mq \Rightarrow b \vdots d\,.$$

II. $b\not\vdots d$ болгон учур. Бул учурда (2) сызыктуу салыштыруунун мүчөлөрүн жана модулду $d$ га бөлсөк, анда

$$a_1x = b_1 (mod\, m_1) \qquad (3)$$

Мында $(a_1, m_1) = 1$ болсо, анда (3) салыштыруу жалгыз гана чечимге ээ болот.

$$x = x_0 (mod\, m_1)$$

$\{0, 1, \dots, x_0, x_0 + m_1, x_0 + (d-1)m_1\}$ - чегериштердин келтирилген системасы болгондуктан,

$$\left.\begin{array}{r} x \equiv x_0 \\ x \equiv x_0 + m_1 \\ \text{--------} \\ x \equiv x_0 + (d-1)m_1 \end{array}\right\} (mod\, m)$$

салыштыруулар (2) салыштыруунун түрдүү чечимдери болушат. Демек, бул учурда (2) салыштыруу $d$ түрдүү чечимге ээ.

Натыйжада төмөнкү теорема далилденди.

***Теорема.*** *Эгерде (2) салыштырууда $(a, m) = 1$ болсо, анда салыштыруу жалгыз гана чечимге ээ, $(a, m) = d > 1$ болсо, анда салыштыруунун чечими жашабайт.*

## АДАБИЯТТАР


1. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984. – 416 с.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975. – 431 с.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М.: Наука, 1977. – 496 с.
4. Кострикин А.И. Сборник задач по алгебре. – М.: Физматлит, 2001. – 464 с.
5. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии / А.А.Бурдун, Е.А.Мурашко, М.М.Толкачев, А.С.Феденко. – Мн.: Университетское, 1989. – 286 с.
6. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Физматлит, 2004. – 256 с.

Басуука берилди: 25.10.2010

Формат: 60x84 1/16    Көлөмү: 5,75 б.т.  Нускасы: 200 даана.

«КАГАЗ ИШТЕРИ» басмаканасында басылды
Ош шаары, Сулайманов көчөсү №3